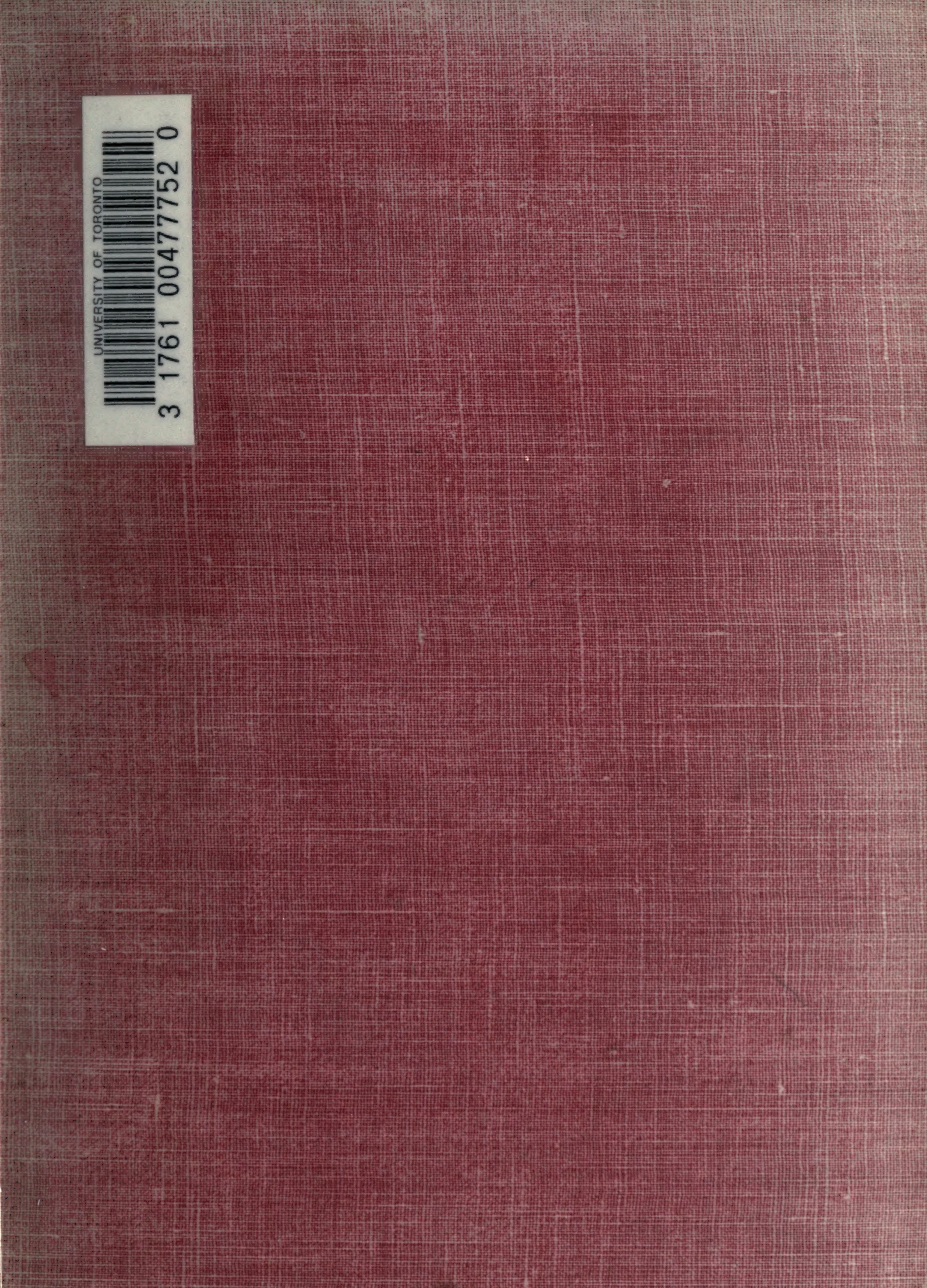
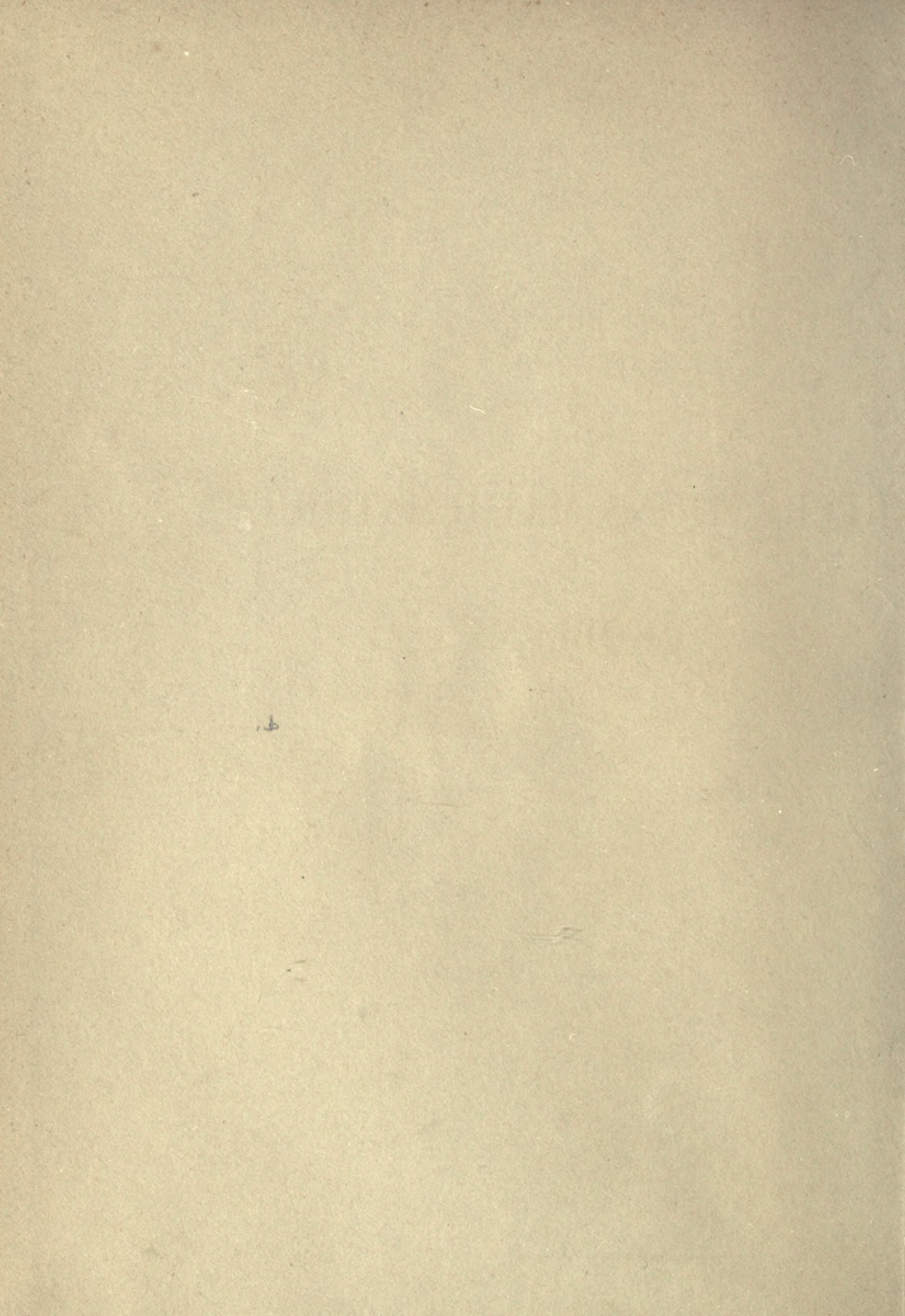

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00477752 0

G H Hardy



RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

ET

PROBLÈMES

DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES

RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET
PROBLÈMES
DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES

PAR

W. ROUSE BALL

FELLOW AND TUTOR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

Deuxième édition française

traduite d'après la Quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions

par J. Fitz-Patrick

TROISIÈME PARTIE

avec additions de MM. Margossian, Reinhart,
Fitz Patrick et Aubry.

PARIS

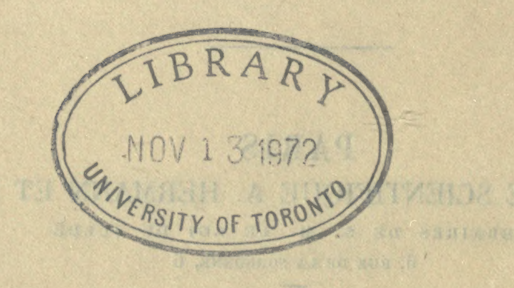
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

—

1909


LIBRARY
NOV 13 1972
UNIVERSITY OF TORONTO

PRÉFACE

Ce troisième volume contient trois des chapitres les plus remarquables de l'ouvrage de M. Rouse Ball : Astrologie, Hyperespace, Du temps et de sa mesure.

Le reste de l'ouvrage est l'œuvre de divers auteurs.

M. Margossian a bien voulu nous donner un chapitre intéressant sur l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques.

M. le capitaine Reinhart nous a donné la note : sur l'emploi du papier calque pour la solution graphique de problèmes de construction géométrique et deux théorèmes intéressants.

M. Fitz Patrick a rédigé la note terminale de l'ouvrage : La géométrie par le pliage et le découpage du papier.

Mais les additions les plus considérables sont dues à un mathématicien bien connu, M. Aubry. Elles sont de nature bien trop diverses pour que nous en fassions ici l'énumération. Le lecteur n'aura qu'à jeter un coup d'œil sur la table des matières pour se convaincre de l'intérêt considérable qu'elles ajoutent à l'ouvrage.

A. H.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

TROISIÈME PARTIE

DE L'ORDONNANCE DES NOMBRES DANS LES CARRÉS MAGIQUES IMPAIRS

Par A. MARGOSSIAN
Ingénieur, ancien élève de l'École des Ponts et Chaussées

Le problème des carrés magiques consiste, on le sait, à disposer les n^2 termes d'une progression arithmétique quelconque dans un carré uniformément divisé en n^2 cases de façon à obtenir une somme constante, suivant chacune des bandes horizontales et verticales, et aussi suivant chacune des deux diagonales. On pourrait aussi bien adopter n progressions arithmétiques différentes de n termes chacune et obtenir également des carrés magiques. Nous ne considérerons dans ce travail que la progression arithmétique naturelle constituée par les nombres qui se suivent de 1 à n^2. Le lecteur appliquera aisément ce qui sera indiqué à d'autres séries.

On appelle *base*, *module* ou *racine* d'un carré, le nombre de cases de chacune de ses bandes. Nous supposons que le carré est placé sur une ligne horizontale et nous désignerons simplement ses bandes horizontales et verticales par les expressions *lignes* et *colonnes*. Il ne peut y avoir aucune ambiguité à cet égard.

Soit donc n la base du carré ; celui-ci aura n^2 cases dans lesquelles il s'agit, ainsi qu'il a été dit, de placer les nombres successifs de 1 à n^2 de manière que la somme, dans chacune des lignes,

chacune des colonnes et chacune des deux diagonales soit constante. Cette somme est désignée sous le nom de *constante du carré*. La somme des n^2 premiers nombres naturels est $\frac{n^2+1}{2}n^2$.

Comme il y a dans le carré n séries horizontales ou verticales, sa constante sera $\frac{n^2+1}{2}n$.

Nous commencerons par les carrés magiques dont la base, module ou racine n est un nombre premier (supérieur à 2) et nous verrons ensuite les conditions qui régissent l'application de ces procédés aux modules non premiers.

CHAPITRE PREMIER

—

CARRÉS MAGIQUES DE MODULES PREMIERS

Nous prendrons pour exemple le carré de base $n = 5$ et ayan par suite 25 cases. Ce qui sera dit pour ce cas, s'appliquera intégralement à un carré de module supérieur. Nous devons inscrire sur n rangs (5 dans le cas actuel) les n^2 termes de notre progression arithmétique.

1 .	2 .	3 .	4 .	5
6 .	7 .	8 .	9 .	10
11 .	12 .	13 .	14 .	15
16 .	17 .	18 .	19 .	20
21 .	22 .	23 .	24 .	25

Fig. 1

Cet ensemble constitue un *groupe fondamental naturel* ou simplement un *groupe naturel*. On remarquera que la ligne et la colonne

médianes ont pour somme la constante du carré et qu'il en est de même pour les deux diagonales (¹).

Les carrés magiques peuvent être divisés en deux grandes classes : ceux dans lesquels l'ordonnance des nombres est régulière et définie et ceux dans lesquels cette ordonnance n'obéit à aucune règle apparente. Notre programme consiste à étudier les premiers qui sont les plus intéressants et dont on déduit d'ailleurs une grande partie de ces derniers. Ils comprennent une infinité de carrés qui appartiennent à deux types généraux que nous allons successivement examiner.

A). TYPES DE CARRÉS A ORDONNANCE OU DISPOSITION OBLIQUE

Plaçons le premier nombre du groupe fondamental ci-dessus défini dans une quelconque (nous indiquerons tout à l'heure une petite restriction à cet égard) des cases du carré et non située sur la diagonale montante ↗. Inscrivons successivement les nombres de la première ligne de ce groupe dans les cases qui suivent parallèlement à cette diagonale (en d'autres termes, ces nombres suivent *la marche des pions au jeu de dames*). Aussitôt que l'on aura atteint un des bords du carré, on placera provisoirement le nombre suivant, en supposant le carré *reproduit au-delà* de ce bord. Le nombre 4 de la figure 2 se trouve dans ce cas. Ce nombre devra occuper dans le carré une situation identique à celle qu'il possède dans le carré auxi-

(¹) Nous désignerons par diagonale *montante* que nous représenterons aussi par le signe ↗ celle qui part du sommet inférieur du carré : l'autre diagonale sera représentée par ↘.

liaire que nous avons supposé et qui est tracé en pointillé sur la même figure.

	20	22	4		13
19	21	3	10	12	19
25	2	9	11	18	25
1	8	15	17	24	
7	14	16	23	5	7
13	20	22	4	6	
	21				

Fig. 2.

Mettons donc ce nombre à la place qu'il doit occuper dans le carré adopté et complétons, comme il a été dit, le placement des nombres de la première ligne du groupe. Le dernier nombre de la première ligne (5 dans le cas de la figure) étant inscrit, nous inscrirons le premier nombre de la ligne suivante, immédiatement au dessous de ce dernier et nous placerons les nombres successifs de cette seconde ligne comme nous l'avons fait pour la première, c'est-à-dire suivant la marche des pions au jeu de dames. Dans le cas de la figure, le nombre 7 tombe dans le carré provisoire de droite, il a été reporté à la place qu'il doit définitivement occuper. Le dernier nombre de la seconde ligne étant placé (c'est le nombre 10 dans notre hypothèse), le premier nombre de la troisième ligne (soit 11) sera inscrit immédiatement au-dessous et l'on continuera à appliquer la règle jusqu'à épuisement de tous les nombres du groupe fondamental adopté. Le carré ainsi constitué sera magique.

Pour bien fixer les idées, nous donnerons comme second exemple, un carré de module 7. On a figuré les carrés latéraux provisoires

afin de faire complètement saisir la méthode. En pratique, il est inutile de les tracer.

	34		45	5	14	16	25	
33	42	44	4	13	15	24	33	
41	43	3	12	21	23	32	41	
49	2	11	20	22	31	40	49	
1	10	19	28	30	39	48		
9	18	27	29	38	47	7	9	
17	26	35	37	46	6	8		
25	34	36	45	5	14	16		
					15			

Fig. 3.

On remarquera, l'observation est importante (et c'est ce que Bachet n'a pas vu, quoiqu'il eut le germe de la méthode), que la *ligne médiane du groupe fondamental occupe la diagonale montante du carré*. C'est la *ligne magique* du groupe. Pour tous les carrés ainsi formés, le point de départ doit être choisi de façon que les nombres de la ligne médiane occupent cette diagonale. Autrement le carré *ne serait pas magique*.

Le premier nombre du groupe doit être inscrit dans une case telle, que, de par le mécanisme adopté pour le placement des nombres, la ligne médiane du groupe foudamental vienne naturellement occuper ladite diagonale. Il suffit pour cela que ce premier nombre soit placé dans une parallèle à cette diagonale dont le rang à compter de cette dernière, soit précisément celui de la ligne magique dans le groupe fondamental.

L'ordre des lignes et des colonnes du groupe fondamental naturel peut être modifié *d'une façon quelconque*. Quelles que soient les per-

mutations que l'on fasse subir aux lignes et aux colonnes du groupe naturel, *toutes les dispositions ainsi obtenues* constituent des *groupes fondamentaux* sur lesquels on peut opérer, comme on l'a fait pour le groupe naturel. Les carrés déduits de tous ces groupes seront magiques à *la condition de toujours placer dans la diagonale montante la ligne magique* du groupe considéré.

L'ordre des lignes du groupe fondamental étant ainsi indifférent, on placera sa première ligne dans une suite quelconque de cases appartenant à une *parallèle* à la dite diagonale. Le dernier nombre de cette ligne se trouvera immédiatement au-dessus d'une case diagonale ou non. Dans le premier cas, on placera au-dessous du dernier nombre inscrit, le premier nombre de la ligne magique du groupe et l'on continuera comme il a été dit : les nombres de cette ligne étant tous placés, on inscrira dans le carré toutes les lignes qui restent conformément à la règle indiquée. Dans le second cas, on opèrera suivant la règle donnée jusqu'à ce que le dernier nombre d'une ligne se trouve immédiatement au-dessus d'une case diagonale; et alors on placera sous ce dernier, le premier nombre de la ligne magique.

Ces explications, un peu longues peut-être, étaient nécessaires pour bien faire comprendre le mécanisme de la méthode. On voit d'ailleurs que l'on peut s'affranchir de toute sujétion en plaçant au premier rang du groupe, les chiffres de sa ligne magique et en inscrivant immédiatement ces chiffres dans la diagonale qu'ils doivent occuper.

Soit comme exemple, le groupe suivant tiré du groupe naturel.

2 . 4 . 5 . 1 . 3
12 . 14 . 15 . 11 . 13
17 . 19 . 20 . 16 . 18
22 . 24 . 25 . 21 . 23
7 . 9 . 10 . 6 . 8

Fig 4

et dans lequel la ligne médiane occupe le second rang. Plaçons tout

d'abord les nombres de cette ligne dans la diagonale montante en partant d'une case quelconque de cette diagonale et nous obtiendrons le carré ci-contre (*fig.* 5).



Fig. 5.

On voit que l'on formera ainsi un très grand nombre de carrés magiques tous différents et dans lesquels on peut faire occuper à un chiffre quelconque, n'appartenant pas à la ligne magique, une quelconque des $n^2 - n = n(n - 1)$ cases n'appartenant pas à la diagonale montante.

La particularité relative à cette ligne magique étant toujours respectée on peut, au lieu de placer le premier nombre d'une ligne immédiatement au-dessous du dernier nombre de la ligne précédente, le placer 2, 3 etc., jusqu'à $(n - 2)$ [1] cases au-dessous et faire l'inscription des nombres d'une même ligne comme il a été dit précédemment. Les carrés obtenus seront tous magiques. On a ainsi $(n - 2)$ *types distincts* de carrés à ordonnance oblique.

Ce carré limite *de degré* $(n - 2)$ présente une *particularité essentielle*. Elle consiste en ce que la *colonne magique* du groupe (c'est la *colonne médiane* du groupe naturel) occupe la *seconde diagonale du carré*.

[1] Les carrés de Bachet appartiennent à ce dernier type.

Le choix de la case de départ, pour le construire, se trouve ainsi limité. Cette case doit être telle que la *case centrale du carré* soit occupée par le *chiffre central ou médian du groupe naturel.*

Dans la pratique, il suffit de disposer le groupe de façon à donner le premier rang à la ligne et à la colonne magiques, tout en plaçant en tête du groupe le nombre central. Ceci fait, on construira le carré en inscrivant le premier nombre du groupe ainsi constitué dans sa case centrale.

Il n'est peut-être pas superflu de faire remarquer que placer un nombre $(n - 2)$ cases au-dessous d'un autre revient à le placer $[n - (n - 2)] = 2$ cases *au-dessus* de ce dernier.

Ce qui précède fait comprendre la singularité des carrés de module 3. Ce sont des carrés limites, c'est-à-dire de degré $(n - 2)$: leurs deux diagonales doivent être occupées par la ligne et la colonne médianes du groupe naturel. Il faut, pour les former, placer ces dernières dans les deux diagonales. On les complètera facilement. La constante des carrés de 3 est 15. Ce module ne fournit donc qu'un *type unique* de carré.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fig. 6

Il n'est pas nécessaire d'écrire le groupe fondamental toutes les fois que l'on se propose de construire un carré. Un peu d'habitude permet de s'en dispenser ; mais pour éviter toute erreur, il est bon de placer dès le début dans la diagonale montante les nombres de la ligne magique du groupe dans l'ordre que l'on veut adopter.

Ci-après, à titre d'exercices quelques exemples de carrés à disposition oblique. Ils correspondent à des groupes fondamentaux différents qu'il est d'ailleurs aisé de retrouver. Nous nous bornerons au module 7.

6	32	9	42	19	45	22
31	8	41	18	44	28	5
14	40	17	43	27	4	30
39	16	49	26	3	29	13
15	48	25	2	35	12	38
47	24	1	34	11	37	21
23	7	33	10	36	20	46

Fig. 7. — Degré 2

37	15	4	49	34	12	24
18	7	48	33	10	23	36
6	47	31	9	22	39	21
45	30	8	25	42	20	5
29	11	28	41	19	3	44
14	27	40	17	2	43	32
26	38	16	1	46	35	13

Fig. 8. — Degré 3

14	30	48	1	19	39	24
29	47	4	17	42	23	13
45	7	16	41	22	12	32
6	15	40	25	10	35	44
18	38	28	9	34	43	5
37	27	8	33	46	3	21
26	11	31	49	2	20	36

Fig. 9. — Degré 4.

18	47	8	41	2	35	24
45	11	40	1	34	23	21
14	38	4	33	22	20	40
37	7	31	25	19	43	13
6	30	28	17	46	12	36
29	27	16	49	10	39	5
26	15	48	9	42	3	32

Fig. 10. — Degré $(n - 2) = 5$.

46	15	40	9	34	3	28
21	39	8	33	2	27	45
38	14	32	1	26	44	20
13	31	7	25	43	19	37
30	6	24	49	18	36	12
5	23	48	17	42	11	29
22	47	16	41	10	35	4

Fig. 11 — Degré 5.

Pour placer les chiffres successifs d'une ligne dans le carré, nous avons adopté l'ordonnance oblique vers la droite. On conçoit que l'on peut les disposer obliquement vers la gauche. On obtiendrait ainsi des carrés qui seraient l'image dans un miroir des précédents. On ne peut donc pas les considérer comme distincts. On peut aussi bien disposer ces chiffres en descendant vers la gauche ou la droite ; dans ce cas, le premier nombre d'une ligne devra être placé *au-dessus* du dernier nombre de la ligne précédente. Ces carrés ne sont également pas nouveaux ; on les obtiendrait aussi en faisant tourner les précédents de 180° dans leur plan.

Dans tous les carrés obliques, à l'exception de ceux de degré $(n-2)$, on peut, sans modifier leur ordre relatif, transporter un nombre quelconque de lignes de la partie $\left\{\begin{matrix}\text{supérieure}\\ \text{inférieure}\end{matrix}\right\}$ du carré à sa partie $\left\{\begin{matrix}\text{inférieure}\\ \text{supérieure}\end{matrix}\right\}$, à la condition de transporter ensuite un même nombre de colonnes de la $\left\{\begin{matrix}\text{droite}\\ \text{gauche}\end{matrix}\right\}$ à la $\left\{\begin{matrix}\text{gauche}\\ \text{droite}\end{matrix}\right\}$ de ce carré.

Les carrés ainsi obtenus sont tous magiques, ils appartiennent au type du carré dont ils auront été déduits.

Les carrés à ordonnance oblique peuvent, par ses déplacements de quartiers et autres modifications que l'on trouvera décrits en détail dans l'ouvrage de M. Riollot déjà cité, donner naissance à une foule d'autres combinaisons également magiques, mais dans lesquelles l'ordonnance régulière que nous avons définie se trouve totalement masquée et que l'on ne peut par suite constituer directement. C'est pourquoi on pourrait les appeler *dérivés* par opposition aux premiers que l'on peut qualifier de *primitifs*.

Entre autres modifications que l'on peut faire subir aux carrés à ordonnance oblique, nous nous contenterons de signaler la suivante. Si l'on divise l'un de ces carrés, d'un degré m différent de $(n-2)$, en deux parties par sa diagonale descendante et si, conservant sa position au grand triangle dont l'hypothénuse est constituée par cette diagonale, on fait glisser sur ses colonnes le petit triangle

de façon à l'amener au-dessous du précédent, on obtient un parallélogramme dont toutes les bandes et les diagonales sont magiques. En le redressant, on en fait un carré qui appartient à la catégorie de ceux qui seront décrits ci-après.

Soit à titre d'exemple le carré de module 7 et de degré 3.

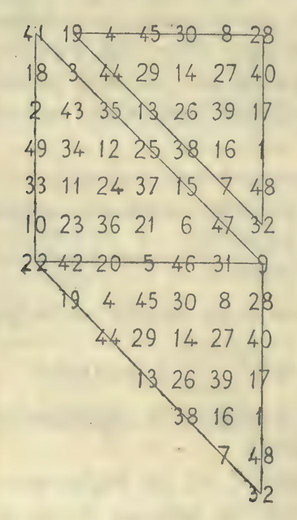


Fig. 12

41	3	35	25	15	47	9
18	43	12	37	6	31	28
2	34	24	21	46	8	40
49	11	36	5	30	27	17
33	23	20	45	14	39	1
10	42	4	29	26	16	48
22	19	44	13	38	7	32

Fig. 13. — Parallélogramme redressé.

B) TYPES DE CARRÉS
A ORDONNANCE OU DISPOSITION CAVALIÈRE

Dans ces carrés, les nombres successifs d'une même ligne du groupe suivent une marche analogue à celle du cavalier au jeu des échecs. Dans une première série de carrés, un nombre *b* occupe par rapport à celui *a* qui le précède dans une ligne du groupe, la

position indiquée sur la figure 14. En d'autres termes, les coordon-

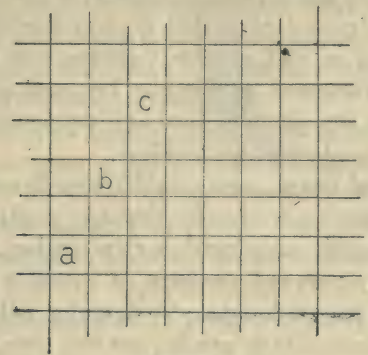


Fig. 14.

nées de b relativement à a dans le carré sont 1 suivant la direction horizontale et 2 suivant la direction verticale. En désignant ces *deux directions* par x et y, on peut représenter la situation de b relativement à a par $(x + 2y)$, étant bien entendu que x et y n'ont aucune valeur quantitative. La position du nombre suivant c, de la même ligne, sera $(x + 2y)$ par rapport à b et $2(x + 2y)$ ou $2x + 4y$ par rapport à a; c'est-à-dire que pour trouver la situation de c à partir de a, il faut avancer de deux cases horizontalement et de quatre cases verticalement.

En général, la position dans un carré de deux nombres successifs du groupe peut être définie par l'expression $(px + qy)$, p et q désignant le nombre de cases dont on doit avancer suivant les directions principales, à partir du premier de ces points, pour trouver la position du second.

Si donc $(px + qy)$ définit l'ordonnance de deux nombres successifs d'une même ligne du groupe fondamental, il faudra multiplier cette expression par 2, 3, 4, etc., pour trouver la position dans le carré des nombres suivants de la même ligne. Chacun de ces facteurs doit affecter en même temps les deux paramètres p et q, les lettres x et y étant seulement, nous le répétons, les *symboles indicatifs des deux*

directions principales. On pourrait à la rigueur s'en dispenser, en convenant que dans une expression binome, le premier terme indique le nombre de cases dont on doit avancer horizontalement et le second, celui dont on doit avancer verticalement. Pour employer des notations très connues, on dira que l'expression est une quantité complexe que l'on peut tout aussi bien représenter par $(p + qi)$, l'addition étant simplement géométrique.

Dans tout ce qui suivra, nous considérerons le sommet inférieur gauche du carré comme *origine*, les directions positives des x et des y étant celles des côtés qui partent de cette origine. Avec cette convention, toutes les cases qui occupent la première ligne du carré (soit sa base) ont pour ordonnées zéro et toutes celles qui occupent sa première colonne (celle de gauche) ont zéro pour abscisses.

Les coefficients de x et de y ne peuvent acquérir que des valeurs entières inférieures à $(n - 1)$. Sitôt qu'un de ces coefficients dépasse cette valeur, la position correspondante se trouve dans un des carrés auxiliaires des fig. 2, 3 et 5. Reporter cette position dans le carré adopté équivaut à déduire n de la valeur de ce coefficient. En d'autres termes, les expressions $(px + qy)$ indicatives de la position d'un nombre dans un carré, sont des *expressions congruentes de module n*.

Ces quelques indications familières d'ailleurs à tout lecteur au courant des plus simples notions mathématiques, nous seront utiles plus loin.

Les nombres successifs d'une même ligne du groupe fondamental, suivent, dans le premier des types que nous étudions maintenant, la marche du cavalier de l'échiquier. Le premier nombre du groupe adopté sera placé dans une *quelconque* des cases du carré et les nombres qui suivent dans la même ligne, disposés comme il est dit (la marche doit toujours être dans le même sens ; celle que nous adoptons a ses deux coordonnées positives, c'est-à-dire vers la droite en montant). Si l'un de ces nombres dépasse les limites du carré et tombe dans l'un des carrés auxiliaires qui l'entourent, on le reportera dans la case identique du carré que l'on se propose de for-

mer, tout comme cela a été fait pour les carrés à ordonnance oblique. Les nombres de la première ligne étant épuisés, on placera *sous le dernier nombre inscrit*, le premier nombre de la ligne suivante et l'on continuera ainsi jusqu'à épuisement de tous les nombres du groupe. Le carré formé sera magique.

Dans les carrés du type qui vient d'être défini, l'ordre des lignes et colonnes du groupe fondamental n'a aucune importance. On peut permuter les lignes ou les colonnes, comme on le voudra, placer le premier nombre du groupe dans une case choisie à volonté, *sans restriction*, le carré à ordonnance cavalière que l'on en déduira sera toujours magique. Ci-après (fig. 15) un exemple tiré du groupe naturel et dont le premier nombre a été placé dans la case $(2x + 2y)$.

	48	9	26		4	21	31	
	7	17	34	44	12		39	
47	8	25	42	3	20	30	47	
6	16	33	43	11	28	38	6	
14	24	41	2	19	29	46	14	
15	32	49	10	27	37	5		
23	40	1	18	35	45	13	23	
31	48	9	26	36	4	21		
39	7	17	34	44	12	22		
	8							

Fig. 15.

On peut, dans ces carrés, opérer une permutation circulaire quelconque des lignes et des colonnes, le carré résultant sera magique. Ceci permet de donner à un nombre quelconque du carré une situation relative déterminée. C'est une conséquence du fait que l'on peut placer le premier nombre du groupe dans une case quelconque arbitrairement choisie.

De telles permutations ne peuvent, on le conçoit à priori, modifier la magie des lignes et des colonnes d'un carré déjà magique. Mais la magie des diagonales peut en être altérée. On vérifiera que dans les carrés du type ici défini, toutes les lignes parallèles aux deux directions diagonales du carré sont aussi magiques. En conséquence, une permutation circulaire des lignes ou des colonnes produira aussi toujours des diagonales magiques. C'est le caractère des *carrés diaboliques*.

Les nombres peuvent suivre aussi la marche du cavalier à gauche. On obtiendrait ainsi des carrés qui seraient l'image dans un miroir des précédents.

On peut également donner aux nombres la marche du cavalier descendant à droite ou à gauche. Dans ce cas le premier nombre d'une ligne sera placé *au-dessus* du dernier nombre de la ligne précédente. Ces derniers carrés seraient identiques aux précédents que l'on aurait fait tourner de 180° dans leur plan.

On obtiendra des nouvelles séries de carrés en donnant aux nombres une marche analogue à celle du cavalier, mais montant de 3, 4... $(n - 2)$ pas, au lieu de 2 ; c'est-à-dire que ses marches seraient représentées par $(x + 3y)$, $(x + 4y)$, ... $[x + (n - 2)y]$. Le pas $(n - 2)$ constitue ici aussi une limite. Ces nouveaux carrés, sauf ceux de la dernière série, peuvent subir une permutation circulaire quelconque de leurs lignes ou de leurs colonnes, sans que leur caractère en soit altéré. En d'autres termes, ce sont aussi des carrés diaboliques.

Les carrés de $(n - 2)$ pas présentent une particularité essentielle, analogue à celle des carrés obliques de la série limite. Les nombres de la *colonne magique* du groupe fondamental doivent occuper une des diagonales du carré. Etant données les directions adoptées pour l'ordonnance des nombres, cette colonne occupera toujours la diagonale descendante. Donc pour construire les carrés de ce type, il faudra placer dans la diagonale descendante, un nombre de la colonne magique du groupe fondamental.

Voici quelques exemples de carrés à ordonnance cavalière.

9	34	3	28	46	15	40
17	42	11	29	5	23	48
25	43	19	37	13	31	7
33	2	27	45	21	39	8
41	10	35	4	22	47	16
49	18	36	12	30	6	24
1	26	44	20	38	14	32

Fig. 16. — Carré de 3 pas.

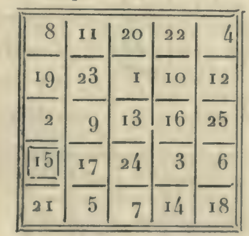
9	42	19	45	22	6	32
17	43	27	4	30	14	40
25	2	35	12	38	15	48
33	10	36	20	46	23	7
41	18	44	28	5	31	8
49	26	3	29	13	39	16
1	34	11	37	21	47	24

Fig. 17. — Carré de 4 pas.

Carrés de n — 2 = 3 pas

23	5	17	11	9
19	13	10	22	1
6	24	3	20	12
2	16	14	8	25
15	7	21	4	18

Fig. 18.



8	11	20	22	4
19	23	1	10	12
2	9	13	16	25
15	17	24	3	6
21	5	7	14	18

Fig. 19.

Carrés cavaliers de module 7 a n-2 = 5 pas

25	10	44	29	21	6	40
33	18	3	37	22	14	48
41	26	11	45	30	15	7
49	34	19	4	38	23	8
1	42	27	12	46	31	16
9	43	35	20	5	39	24
17	2	36	28	13	47	32

Fig. 20

32	21	10	44	36	6	26
47	39	7	24	30	15	13
27	33	18	14	45	37	1
8	48	40	4	28	31	16
2	22	34	19	11	49	38
17	9	43	41	5	25	35
42	3	23	29	20	12	46

Fig. 21

Afin d'aider le lecteur à reconstituer ces 4 derniers carrés, nous avons souligné les cases où l'on a placé le premier nombre du groupe.

La série des carrés à ordonnance cavalière est loin encore d'être épuisée. Dans les types plus haut définis, on peut placer le premier nombre d'une ligne, non pas immédiatement au-dessous, mais 2, 3.., etc., cases au-dessous du dernier nombre de la ligne précédente. On obtient ainsi des carrés cavaliers de pas et de degrés divers.

13	20	22	4	6
1	8	15	17	24
19	21	3	10	12
7	14	16	23	5
25	2	9	11	18

Fig 22.
Carré limite

Les carrés que l'on peut ainsi constituer sont ceux pour lesquels la *somme du pas et du degré* ne dépasse pas $n - 1$ [1] ; et dans le cas où cette somme égale cette limite, les nombres de la colonne magique du groupe doivent occuper la diagonale descendante du carré.

Ci-dessous quelques exemples de carrés cavaliers.

17	42	11	29	5	23	48
33	2	27	45	21	39	8
49	18	36	12	30	6	24
9	34	3	28	46	15	40
25	43	19	37	13	31	7
41	10	35	4	22	47	16
1	26	44	20	38	14	32

Fig. 23
Carré de 5 pas et de degré 4 (2)

46	15	40	9	34	3	28
30	6	24	49	18	36	12
21	39	8	33	2	27	45
5	23	48	17	42	11	29
38	14	32	1	26	44	20
22	47	16	41	10	35	4
13	31	7	25	43	17	37

Fig. 24
Cavalier simple de degré 3

(1) En d'autres termes, cette somme ne peut-être congrue à n, c'est-à-dire égale à zéro.

(2) La régle de la limite n'est pas en défaut, puisque $5 + 4 = 9 \equiv 2$.

Si l'on divise un carré cavalier de $(n-2)$ pas et de degré un, en deux parties par sa diagonale descendante et si l'on transporte le petit triangle supérieur sous le grand triangle limité par cette diagonale, on obtient un parallélogramme qui, redressé, est un cavalier simple magique à deux pas. Il ne faudrait pas en conclure que la division, effectuée sur un carré cavalier simple, donnera toujours un carré cavalier de $(n-2)$ pas.

De nouvelles séries de carrés magiques seront encore fournies par une ordonnance moins simple pour les nombres successifs d'une même ligne du groupe et aussi pour leur degré. Un choix judicieux des paramètres de marche et de ceux du degré donnera toujours un carré magique. Exemples :

4	37	28	12	45	29	20
48	32	16	7	40	24	8
36	27	11	44	35	19	3
31	15	6	39	23	14	47
26	10	43	34	18	2	42
21	5	38	22	13	46	30
9	49	33	17	1	41	25

Fig. 25
Cavalier simple de degré $3x$

9	46	34	15	3	40	28
17	5	42	23	11	48	29
25	13	43	31	19	7	37
33	21	2	39	27	8	45
41	22	10	47	35	16	4
49	30	18	6	36	24	12
1	38	26	14	44	32	20

Fig. 26. — Cavalier de degré un et de marche $(2x + 3y)$

Ce dernier carré (fig. 26) est aussi cavalier de 5 pas et de degré 4 pour un groupe fondamental dans lequel l'ordre de colonne serait 1-5-2-6-3-7-4. Comparer ce carré à celui de la figure 23.

La variété des types dans la catégorie définie en dernier lieu paraît considérable ; mais ils peuvent être souvent ramenés à des types plus simples.

Ce qui précède montre qu'il existe deux séries de marches uni-

formes (oblique et cavalière) qui donnent toujours d'emblée des carrés magiques.

Le fait seul que les nombres d'une ligne du groupe fondamental que l'on considère, ont dans le carré une ordonnance régulière implique également une ordonnance régulière pour les nombres d'une même colonne. Considérons par exemple les carrés cavaliers de $(n - 2)$ pas. Nous savons que leur diagonale → est occupée par les nombres de la colonne magique du groupe. Nous pouvons en conclure, ainsi que l'on peut le vérifier, que toute ligne parallèle à cette diagonale est constituée par des nombres appartenant à une même colonne du groupe fondamental.

La règle est générale. La distribution dans le carré des nombres d'une même colonne est étroitement liée à celle des nombres d'une même ligne. On peut, pour chaque type de carré, déterminer cette relation. On vérifiera que dans les carrés obliques, par exemple, les nombres d'une même colonne sont distribués suivant une marche cavalière qui ne varie pas pour toutes les colonnes du groupe ; mais cette marche est *montante vers la gauche*. Le pas du cavalier est égal à la différence entre $(n - 1)$ et le degré du carré oblique considéré.

Dans les carrés cavaliers *non limites*, les nombres d'une même colonne suivent aussi une marche cavalière vers la gauche.

Le lecteur sait maintenant construire avec facilité une infinité de carrés magiques d'un module premier quelconque. Chacun de ces carrés donnera, par l'application des règles de Lucas et autres citées à l'occasion des carrés obliques, naissance à un grand nombre de carrés différents également magiques, mais dans lesquels l'ordonnance primitive des nombres se trouvera complètement bouleversée, au point que souvent il sera difficile sinon impossible de retrouver le carré dont ils ont été déduits.

Nous pensons que l'on peut appeler *dérivés* ou *secondaires* les carrés de cette nature par opposition aux premiers que l'on est justifié à qualifier de *primitifs* ou *réguliers*.

Quelles que soient les permutations que l'on fasse subir aux

lignes d'une part et aux colonnes d'autre part dans le groupe naturel, il est clair qu'une ligne ou une colonne quelconque des groupes résultants est toujours constituée par les mêmes nombres, dont l'ordre seul a varié par suite de ces permutations. Lorsqu'on se trouvera en présence d'un carré magique, il faudra y chercher la suite des nombres d'une même ligne et en étudier la disposition. Il suffira toujours de l'examen de quelques-uns d'entre eux pour en déduire immédiatement sa constitution et voir s'il est primitif ou dérivé.

Il serait intéressant de calculer le nombre de carrés primitifs distincts que l'on peut construire pour chaque module. Nous ne nous arrêterons pas à cette recherche qui ne rentre pas dans le programme que nous nous sommes tracé.

Nous donnerons ici, sur la théorie des procédés décrits, les quelques notions qui nous sont strictement indispensables, pour faciliter l'exposition du chapitre qui suit relatif aux modules composés. Ces notions très simples seront un peu plus développées dans notre seconde partie. Nous engageons toutefois le lecteur qui voudrait les approfondir à consulter « Les Espaces Hypermagiques » de M. G. Arnoux auquel nous les avons empruntées.

Considérons un groupe naturel que nous écrirons en renversant l'ordre des lignes de façon à le lire de bas en haut.

Nous prendrons comme origine le nombre par lequel commence la première ligne. Cette première ligne ou ligne de base sera la direction des x positifs, la première colonne, celle de gauche sera la direction des y positifs. Ce renversement du groupe n'a été opéré que pour faire concorder ces axes avec ceux que nous avions adoptés pour les carrés ; on conçoit qu'il ne modifie nullement tout ce qui a été dit jusqu'ici. Nous désignerons par ξ et η, pour les distinguer, les deux directions principales des carrés.

Afin de préciser nos explications, nous étudierons le groupe de module 5 ; elles s'appliqueront entièrement à un module premier quelconque. Inscrivons donc ce groupe (fig. 27) et supposons-le indéfiniment répété de façon à couvrir uniformément tout le plan. On peut aisément constater qu'une ligne quelconque indéfinie, pas-

sant par deux nombres arbitrairement choisis dans ce groupe, rencontre tout d'abord et dans un certain ordre n *nombres différents* (cinq dans l'exemple choisi), et ces n nombres se retrouvent ensuite sur cette ligne, indéfiniment reproduits dans le même ordre. En un mot, cette ligne ne rencontre dans le plan que n nombres *différents*. L'hypothèse de la répétition indéfinie du groupe n'a été adoptée que pour bien faire saisir ce point. Nous pourrons bientôt l'abandonner. En effet, lorsque la ligne en question aura dépassé les limites de notre premier groupe, elle rencontrera hors de ces limites un nombre que l'on retrouvera dans ce groupe. Il suffira alors de partir de ce dernier, parallèlement à la direction adoptée pour retrouver les nombres que la ligne indéfinie aurait coupés dans le plan. Quand cette parallèle aura dépassé aussi ces limites, on se retrouvera dans le même cas que précédemment et on continuera l'opération par une troisième parallèle à la direction donnée, et ainsi de suite. Notre groupe originel fournira donc ces n *nombres* et l'on retombera finalement sur le point de départ. Ainsi ce groupe suffit à lui seul pour représenter le plan uniforme que nous avons imaginé. On peut dire qu'il représente ce plan congruent de module n.

21	22	23	24	25
16	17	18	19	20
11	12	13	14	15
6	7	8	9	10
1	2	3	4	5

Fig. 27

Sauf pour les deux *directions principales* x et y (l'expression comprend *toutes les parallèles* à ces deux directions) qui ne jouissent pas de la propriété que nous allons indiquer, on peut vérifier que la *somme des n nombres* différents rencontrés par *une direction quelconque* est *magique*. Le groupe fondamental est donc magique pour toutes ses directions autres que les deux principales.

Adoptons donc deux directions quelconques partant de l'origine du groupe et *différentes* de celles des deux axes ; elles sont magiques. Inscrivons respectivement sur les axes ξ et η du carré et dans l'ordre où ils se présentent, les nombres rencontrés par chacune de ces deux directions. Nous avons ainsi les éléments suffisants pour la formation d'un carré.

Soient, par exemple, les deux directions déterminées par les nombres 1 et 8, d'une part et 1 et 12, d'autre part. Inscrivons (fig. 28) les nombres 1, 8, 15, 17 et 24 rencontrés par la première direction sur l'axe ξ et 12, 23, 9 et 20 rencontrés par la seconde sur l'axe η du carré. Ceci fait, prenons dans le groupe une ligne partant du nombre 12 et parallèle à la ligne (1, 8) de ce groupe; elle rencontrera les nombres 19, 21, 3 et 10 que nous inscrirons dans le carré sur la bande horizontale à l'origine de laquelle le nombre 12 a été placé. Ces cinq nombres ont aussi une somme magique. Pour former la troisième ligne du carré, on tracera dans le groupe une nouvelle ligne parallèle à (1, 8) et partant du nombre 23 et ainsi de suite jusqu'à ce que le carré soit complètement rempli. Les nombres ainsi rencontrés par chacune des lignes sont tous différents; ce seront donc les n^2 nombres du groupe. Au lieu de construire le carré au moyen de lignes parallèles à (1, 8) dans le groupe, on aurait tout aussi bien pu le former en adoptant des lignes parallèles à (1, 12) et partant de chacun des nombres inscrits à la base du carré. L'ordonnance des nombres du carré n'en aurait pas été modifiée.

20	22	4	6	13
9	11	18	25	2
23	5	7	14	16
12	19	21	3	10
1	8	15	17	24

Fig. 28

Les notations adoptées permettent de définir les lignes et colonnes de ce carré par les deux relations

$$\xi = 2x + y,$$
$$\eta = x + 2y.$$

La diagonale montante sera par suite représentée par

$$\xi + \eta = 3x + 3y$$

et la diagonale descendante par

$$\eta - \xi = -x + y;$$

ces deux lignes sont aussi magiques, puisqu'elles ne sont pas parallèles aux axes du groupe.

Le carré est donc magique. Il a pour marche $4\xi + 3\eta$ et pour degré $(2\xi + 2\eta)$. Sa diagonale montante est constituée par les nombres de la diagonale montante du groupe, pris de 3 en 3.

Si l'on veut déterminer directement les nombres de la diagonale descendante, on constatera que l'on connaît deux nombres de cette diagonale; ce sont les nombres 24 et 20 occupant les cases extrêmes des deux axes du carré : on pourra donc partir de l'un d'eux pour retrouver tous les autres.

La méthode, on le voit, est des plus simples. La solution exacte du problème dépend du choix judicieux des paramètres des deux équations fondamentales.

En général pour que deux équations

$$\xi = ax + by \quad \text{et} \quad \eta = a'x + b'y$$

puissent donner un carré magique, il faut que le déterminant $(ab' - ba')$ de leurs paramètres soit *premier avec le module n* du groupe adopté.

Nous savons que ces deux équations sont des congruences de module n; mais on peut sans inconvénient substituer le signe $=$ de l'égalité à celui $\equiv$ adopté pour les congruences, la confusion n'étant pas ici possible.

Les deux équations fondamentales ci-dessus permettent de résoudre un très-grand nombre de problèmes relatifs aux carrés magiques. Nous y reviendrons dans la seconde partie. Nous proposerons cependant, à titre d'exercice, les suivants dont la solution est aisée à trouver :

1° Etant donné un nombre du groupe fondamental naturel, quelle case occupera-t-il dans le carré?

2° Inversement, un nombre occupant une case donnée du carré, quelle est sa situation dans ce groupe?

3° Etant données deux directions déterminant un carré magique, quel est la nature de ce carré; en d'autres termes, quelle est l'or-

donnance dans le carré, des nombres successifs d'une ligne ou d'une colonne du groupe fondamental et quel est son degré ?

4° Etant donné un type de carré régulier, déterminer les paramètres des deux directions principales qui correspondent à ce type.

Pour terminer ce chapitre, nous donnons ci-après quelques exemples de carrés que le lecteur pourra multiplier à son gré. Nous devons toutefois le prévenir que si une erreur s'était glissée dans la transcription ou l'impression de quelques chiffres, il pourra, connaissant le mode de génération indiqué pour chacun de ces carrés, la rectifier facilement.

Carrés à ordonnance oblique de module 11 :

Nous en donnons quatre. Les trois premiers sont déduits du groupe naturel dont on a simplement transporté la ligne magique au premier rang. Le dernier, de degré $9 = n - 2$ est déduit du même groupe dans lequel on a fait une permutation des lignes en en transportant les cinq premières au dernier rang.

Module 11 : *Constante* = *671*

26	74	100	5	42	79	116	21	47	95	66
73	110	4	41	78	115	20	46	94	65	25
109	3	40	88	114	19	45	93	64	24	72
2	39	87	113	18	55	92	63	23	71	108
38	86	112	17	54	91	62	33	70	107	1
85	111	16	53	90	61	32	69	106	11	37
121	15	52	89	60	31	68	105	10	36	84
14	51	99	59	30	67	104	9	35	83	120
50	98	58	29	77	103	8	34	82	119	13
97	57	28	76	102	7	44	81	118	12	49
56	27	75	101	6	43	80	117	22	48	96

Fig. 29 — Oblique de degré 4.

22	36	72	97	111	4	29	54	79	104	63
35	71	96	121	3	28	53	78	103	62	21
70	95	120	2	27	52	88	102	61	20	34
94	119	1	26	51	87	101	60	19	44	69
118	11	25	50	86	100	59	18	43	68	93
10	24	49	85	110	58	17	42	67	92	117
23	48	84	109	57	16	41	77	91	116	9
47	83	108	56	15	40	76	90	115	8	33
82	107	66	14	39	75	89	114	7	32	46
106	65	13	38	74	99	113	6	31	45	81
64	12	37	73	98	112	5	30	55	80	105

Fig. 30. — Carré oblique de degré 6.

79	32	117	70	12	108	50	3	99	41	60
31	116	69	22	107	49	2	98	40	59	78
115	68	21	106	48	1	97	39	58	88	30
67	20	105	47	11	96	38	57	87	29	114
19	104	46	10	95	37	56	86	28	113	77
103	45	9	94	36	66	85	27	112	76	18
55	8	93	35	66	84	26	111	75	17	102
7	92	34	64	83	25	121	74	16	101	54
91	44	63	82	24	120	73	15	100	53	6
43	62	81	23	119	72	14	110	52	5	90
61	80	33	118	71	13	109	51	4	89	42

Fig. 31. — Carré oblique de degré 8.

116	45	106	35	96	25	86	15	76	5	66
55	105	34	95	24	85	14	75	4	65	115
104	44	94	23	84	13	74	3	64	114	54
43	93	33	83	12	73	2	63	113	53	103
92	32	82	22	72	1	62	112	52	102	42
31	81	21	71	11	61	111	51	101	41	91
80	20	70	10	60	121	50	100	40	90	30
19	69	9	59	120	49	110	39	89	29	79
68	8	58	119	48	109	38	99	28	78	18
7	57	118	47	108	37	98	27	88	17	67
56	117	46	107	36	97	26	87	16	77	6

Fig. 32. — Carré oblique de degré 9.

Module 13 : *Constante* = 1105.

99	3	115	19	118	35	134	51	150	54	166	70	91
2	114	18	130	34	133	50	149	53	165	69	90	98
113	17	129	33	132	49	148	65	164	68	89	97	1
16	128	32	131	48	147	64	163	67	88	96	13	112
127	31	143	47	146	63	162	66	87	95	12	111	15
30	142	46	145	62	161	78	86	94	11	110	14	126
141	45	144	61	160	77	85	93	10	109	26	125	29
44	156	60	159	76	84	92	9	108	25	124	28	140
155	59	158	75	83	104	8	107	24	123	27	139	43
58	157	74	82	103	7	106	23	122	39	138	42	154
169	73	81	102	6	105	22	121	38	137	41	153	57
72	80	101	5	117	21	120	37	136	40	152	56	168
79	100	4	116	20	119	36	135	52	151	55	167	71

Fig. 33. — Oblique degré 2.

113	31	144	75	6	119	50	163	94	25	138	56	91
30	156	74	5	118	49	162	93	24	137	55	90	112
155	73	4	130	48	161	92	23	136	54	89	111	29
72	3	129	47	160	104	22	135	53	88	110	28	154
2	128	46	159	103	21	134	65	87	109	27	153	71
127	45	158	102	20	133	64	86	108	39	152	70	1
44	157	101	19	132	63	85	107	38	151	69	13	126
169	100	18	131	62	84	106	37	150	68	12	125	43
99	17	143	61	83	105	36	149	67	11	124	42	168
16	142	60	82	117	35	148	66	10	123	41	167	98
141	59	81	116	34	147	78	9	122	40	166	97	15
58	80	115	33	146	77	8	121	52	165	96	14	140
79	114	32	145	76	7	120	51	164	95	26	139	57

Fig. 34. — Oblique de degré 5.

30	73	129	159	20	63	106	149	10	40	96	139	91
72	128	158	19	62	105	148	9	52	95	138	90	29
127	157	18	61	117	147	8	51	94	137	89	28	71
169	17	60	116	146	7	50	93	136	88	27	70	126
16	59	115	145	6	49	92	135	87	39	69	125	168
58	114	144	5	48	104	134	86	38	68	124	167	15
113	156	4	47	103	133	85	37	67	123	166	14	57
155	3	46	102	132	84	36	66	122	165	26	56	112
2	45	101	131	83	35	78	121	164	25	55	111	154
44	100	143	82	34	77	120	163	24	54	110	153	1
99	142	81	33	76	119	162	23	53	109	152	13	43
141	80	32	75	118	161	22	65	108	151	12	42	98
79	31	74	130	160	21	64	107	150	11	41	97	140

Fig. 35. — Oblique de degré 9.

Les carrés ci-après sont à ordonnance cavalière tirés du groupe naturel. Sauf pour les carrés limites, l'unité a été placée dans la case origine. Le rapprochement et la comparaison de ces carrés donnent des conclusions interessantes qui peuvent aussi être déduites des deux équations fondamentales.

9	26	36	4	21	31	48
17	34	44	12	22	39	7
25	42	3	20	30	47	8
33	43	11	28	38	6	16
41	2	19	29	46	14	24
49	10	27	37	5	15	32
1	18	35	45	13	23	40

Fig. 36
Cavalier simple de degré 1

33	42	44	4	13	15	24
9	18	27	29	38	47	7
41	43	3	12	21	23	32
17	26	35	37	46	6	8
49	2	11	20	22	31	40
25	34	36	45	5	14	16
1	10	19	28	30	39	48

Fig. 37
Cavalier de 2 pas et de degré 2

33	18	3	37	22	14	48
9	43	35	20	5	39	24
41	26	11	45	30	15	7
17	2	36	28	13	47	32
49	34	19	4	38	23	8
25	10	44	29	21	6	40
1	42	27	12	46	31	16

Fig. 38
Cavalier de 3 pas et de degré 2.

4	21	31	48	9	26	36
29	46	14	24	41	2	19
12	22	39	7	17	34	44
37	5	15	32	49	10	27
20	30	47	8	25	42	3
45	13	23	40	1	18	35
28	38	6	16	33	43	11

Fig. 39
Cavalier de 4 pas et de degré 2.

4	30	14	40	17	43	27
20	46	23	7	33	10	36
29	13	39	16	49	26	3
45	22	6	32	9	42	19
12	38	15	48	25	2	35
28	5	31	8	41	18	44
37	21	47	24	1	34	11

Fig. 40

Cavalier de 2 pas et de degré 4

4	13	15	24	33	42	44
37	46	6	8	17	26	35
28	30	39	48	1	10	19
12	21	23	32	41	43	3
45	5	14	16	25	34	36
29	38	47	7	9	18	27
20	22	31	40	49	2	11

Fig. 41

Cavalïer de 3 pas et de degré 3

37	110	51	113	65	6	68	20	82	23	96
73	14	87	28	90	42	104	45	118	59	11
109	50	112	64	5	67	19	81	33	95	36
13	86	27	89	41	103	55	117	58	10	72
49	111	63	4	77	18	80	32	94	35	108
85	26	99	40	102	54	116	57	9	71	12
121	62	3	76	17	79	31	93	34	107	48
25	98	39	101	53	115	56	8	70	22	84
61	2	75	16	78	30	92	44	106	47	120
97	38	100	52	114	66	7	69	21	83	24
1	74	15	88	29	91	43	105	46	119	60

Fig. 42

Cavalier simple de degré 4.

37	14	112	89	77	54	31	8	106	83	60
73	50	27	4	102	79	56	44	21	119	96
109	86	63	40	17	115	92	69	46	23	11
13	111	99	76	53	30	7	105	82	59	36
49	26	3	101	78	66	43	20	118	95	72
85	62	39	16	114	91	68	45	33	10	108
121	98	75	25	29	6	104	81	58	35	12
25	2	100	88	65	42	19	117	94	71	48
61	38	15	113	90	67	55	32	9	107	84
97	74	51	28	5	103	80	57	34	22	120
1	110	87	64	41	18	116	93	70	47	24

Fig. 43. — Cavalier de 3 pas et de degré 4.

37	50	63	76	78	91	104	117	9	22	24
73	86	99	101	114	6	19	32	34	47	60
109	111	3	16	29	42	55	57	70	83	96
13	26	39	52	65	67	80	93	106	119	11
49	62	75	88	90	103	116	8	21	23	36
85	98	100	113	5	18	31	44	46	59	72
121	2	15	28	41	54	56	69	82	95	108
25	38	51	64	77	79	92	105	118	10	12
61	74	87	89	102	115	7	20	33	35	48
97	110	112	4	17	30	43	45	58	71	84
1	14	27	40	53	66	68	81	94	107	120

Fig. 44. — Cavalier de 4 pas et de degré 4.

37	86	3	52	90	18	56	105	33	71	120
73	111	39	88	5	54	92	20	58	107	24
109	26	75	113	41	79	7	45	94	22	60
13	62	100	28	77	115	43	81	9	47	96
49	98	15	64	102	30	68	117	34	83	11
85	2	51	89	17	66	104	32	70	119	36
121	38	87	4	53	91	19	57	106	23	72
25	74	112	40	78	6	55	93	21	59	108
61	110	27	76	114	42	80	8	46	95	12
97	14	63	101	29	67	116	44	82	10	48
1	50	99	16	65	103	31	69	118	35	84

Fig. 45. — Carré de 5 pas et de degré 4.

109	14	51	88	114	30	56	93	9	35	72
85	111	27	64	90	6	43	69	106	22	48
61	98	3	40	77	103	19	45	82	119	24
37	74	100	16	53	79	116	32	58	95	11
13	50	87	113	29	66	92	8	34	71	108
121	26	63	89	5	42	68	105	21	47	34
97	2	39	76	102	18	55	81	118	23	60
73	110	15	52	78	115	31	57	94	10	36
49	86	112	28	65	91	7	44	70	107	12
25	62	99	4	41	67	104	20	46	83	120
1	38	75	101	17	54	80	117	33	59	96

Fig. 45. — Cavalier de 4 pas et de degré 5.

6	19	32	34	47	60	73	86	99	101	114
103	116	8	21	23	36	49	62	75	88	90
79	92	105	118	10	12	25	38	51	64	77
66	68	81	94	107	120	1	14	27	40	53
42	55	57	70	83	96	109	111	3	16	29
18	34	44	46	59	72	85	98	100	113	5
115	7	20	33	35	48	61	74	87	89	102
91	104	117	9	22	24	37	50	63	76	78
67	80	93	106	119	11	13	26	39	52	65
54	56	69	82	95	108	121	2	15	28	41
30	43	45	58	71	84	97	110	112	4	17

Fig. 47. — Cavalier de 5 pas de degré 5.

6	80	44	118	71	24	109	62	15	89	53
42	116	69	33	107	60	13	98	51	4	78
67	31	105	58	22	96	49	2	87	40	114
103	56	20	94	47	11	85	38	112	76	29
18	92	45	9	83	36	121	74	27	101	65
54	7	81	34	119	72	25	110	63	16	90
79	43	117	70	23	108	61	14	99	52	5
115	68	32	106	59	12	97	50	3	88	41
30	104	57	21	95	48	1	86	39	113	77
66	19	93	46	10	84	37	111	75	28	102
91	55	8	82	35	120	73	26	100	64	17

Fig. 48. — Cavalier de 6 pas et de degré 4.

CHAPITRE DEUXIÈME

—

CARRÉS MAGIQUES IMPAIRS DE MODULES NON PREMIERS

L'application des méthodes précédentes à des groupes naturels de modules non premiers donne souvent des carrés *partiellement* magiques ; mais la magie complète ne peut être obtenue que dans quelques cas. En effet, un groupe fondamental de module impair composé étant donné, une *ligne quelconque*, inclinée sur les deux axes de ce groupe, ne rencontre plus toujours n points différents.

Si les paramètres a et b d'une direction $\xi = ax + b$ sont premiers avec le module n du groupe, cette direction passe par n points distincts appartenant chacun à des lignes et à des colonnes différentes ; elle sera magique.

Si un seul des deux paramètres a par exemple est premier avec n et que l'autre ne l'est pas, les ordonnées des divers nombres rencontrés par la direction considérée ne sont pas toutes différentes ; cependant leurs abscisses le seront, de sorte que cette direction passe bien aussi par n points différents ; mais on ne peut pas affirmer qu'elle sera magique ; et, en fait, quelques-unes seulement des lignes qu'elle détermine présenteront la magie cherchée.

Si a et b ont un facteur commun δ avec le module n, c'est-à-dire si $n = \delta p$, la direction $ax + by$ ne rencontrera plus que p points différents, de sorte que la formation du carré magique avec cette direction devient impossible.

On comprend ainsi pourquoi un carré magique de module non premier n'est pas aussi aisé à constituer que les autres. Un groupe quelconque ne donne pas tous les types de carrés précédemment décrits. On devra tout d'abord écarter tous ceux, obliques ou cavaliers, dont le degré n'est pas premier avec le module ; car en procédant à leur construction, on serait amené à placer un nombre dans une case déjà occupée.

Une condition essentielle pour la possibilité du carré est que le déterminant $(ab' - ba')$ des deux directions principales soit différent de zéro (si ce déterminant était nul, les deux directions ne seraient pas distinctes) et premier avec le module. Il faut de plus que, dans chacune des deux équations, les deux paramètres ne soient pas *en même temps* non premiers avec le module.

Pour certains groupes, ces conditions sont suffisantes.

En général, si les quatre paramètres, ainsi que leur déterminant, sont premiers avec le module, on obtient des carrés dont les lignes et les colonnes sont magiques ; mais ces conditions n'assurent pas la magie des deux diagonales. Il faut que les deux équations donnent aussi des diagonales magiques, et souvent les sommes $\xi + \eta$ et $\eta - \xi$ qui les déterminent, ont un de leurs paramètres non premier avec le module, ce qui, nous l'avons vu, peut altérer leur magie.

Soit comme exemple, le groupe naturel de module 9 ; la somme magique est 369.

Soient

$$\xi = -x + 2y \quad \text{et} \quad \eta = x - y$$

les équations des deux directions principales adoptées pour la constitution du carré : leurs paramètres et leur déterminant sont premiers avec le module. Mais d'autre part on a

$$\xi + \eta = y \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 2x - 3y.$$

Donc la diagonale montante sera constituée par une colonne du groupe ; cette colonne est nécessairement la médiane, puisqu'elle est seule magique.

La diagonale descendante, qui est fonction du paramètre 3, varie suivant le nombre que l'on place à l'origine du carré.

En inscrivant successivement dans cette origine tous les nombres de la colonne médiane, on constate que seuls les nombres 5, 32 et 59 (espacés de trois en trois) rendent magique la diagonale considérée. Ainsi la direction $(2x - 3y)$ n'est magique que pour certaines de ses lignes.

Soit comme second exemple, les deux directions

$$\xi = -x + 2y \qquad \eta = 5x - 2y$$

le déterminant $ab' - ba' = -8$ ou, ce qui revient au même, égal à l'unité, puisqu'on peut, sans altérer nos quantités leur ajouter un multiple quelconque du module.

Les deux diagonales seront définies par

$$\xi + \eta = 4x \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 6x - 4y.$$

Ici, la diagonale montante est constituée par les nombres de la ligne magique du groupe (pris avec un intervalle de 4). On peut vérifier que les nombres 37, 40 et 43 seuls de cette ligne placés à l'origine du carré, assurent la magie de la diagonale descendante.

Soient encore les deux directions

$$\xi = 5x + 4y \quad \text{et} \quad \eta = x + y$$

de groupe naturel, on a

$$ab' - ba' = 1$$

$$\xi + \eta = 6x + 5y \qquad \eta - \xi = -4x - 3y = 5x + 6y.$$

Les nombres 20, 47 et 74 de la deuxième colonne, 23, 50 et 77 de la cinquième et 26, 53 et 80 de la huitième, placés dans la case origine rendent magiques les deux diagonales.

On remarquera que ces nombres présentent des intervalles de 3 en ligne et en colonne.

Les restrictions qui précèdent ne sont plus applicables lorsque le

groupe naturel subit une transformation convenable. Dans ce cas, à la condition seule que le déterminant des paramètres soit premier avec le module, les équations de deux directions quelconques inclinées sur les axes du groupe *et passant chacune par n points différents*, donneront des carrés magiques. On devra vérifier que les diagonales aussi passent par n points différents (nous avons vu qu'il suffit pour cela que les deux paramètres de leurs directions ne soient pas en même temps non premiers avec le module).

Il en est ainsi du groupe ci-dessous

64	65	66	68	69	67	72	70	71
55	56	57	59	60	58	63	61	62
73	74	75	77	78	76	81	79	80
28	29	30	32	33	31	36	34	35
46	47	48	50	51	49	54	52	53
37	38	39	41	42	40	45	43	44
19	20	21	23	24	22	27	25	26
10	11	12	14	15	13	18	16	17
1	2	3	5	6	4	9	7	8

Fig. 49

Appliquons-lui les équations [1]

$$\xi = 8x + y \qquad \eta = 5x + 2y$$

pour lesquels on a

$$ab' - ba' = 11.$$

[1] On remarquera qu'une direction inclinée *quelconque* dans le groupe rencontrera toujours neuf nombres dont la somme sera magique, quoique tous ces nombres ne soient pas toujours différents. Cette remarque paraît intéressante.

Les diagonales ont pour équations

$$\xi + \eta = 4x + 3y \qquad \eta - \xi = -3x + y = 6x + y$$

On obtient le carré magique ci-après

60	68	3	11	19	44	52	36	76
35	79	63	67	6	14	21	38	46
41	48	29	73	62	70	9	13	24
16	27	40	51	32	75	56	64	8
66	2	10	26	43	54	31	78	59
81	58	69	5	12	20	37	53	34
47	28	80	61	72	4	15	23	39
22	42	50	30	74	55	71	7	18
1	17	25	45	49	33	77	57	65

Fig. 50

Il a pour marche $\xi + 4\eta$ et pour degré $3\xi - \eta$. On peut permuter circulairement ses lignes et ses colonnes sans altérer sa magie. Ces mêmes équations ne donnent des carrés avec le groupe naturel que si l'on place dans la case origine les nombres 10, 37, 64 ; 13, 40, 67 et 16, 43, 70.

Appliquons encore à ce groupe transformé les équations

$$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = x + y$$

et par suite

$$\xi + \eta = 6x + 5y \qquad \eta - \xi = 5x + 6y$$

qui, avec le groupe naturel ne donnent, on l'a vu plus haut, que quelques carrés. Nous obtiendrons le carré magique *fig.* 51 de

marche $\xi + 5\eta$ et de degré 8 (voir la note insérée en renvoi de la figure 23).

71	42	55	22	74	18	30	7	50
61	23	80	15	28	4	47	72	39
81	12	34	5	53	69	37	58	20
31	2	54	66	43	59	26	78	10
51	64	40	56	27	75	16	32	8
41	62	24	73	13	29	9	48	70
21	79	14	35	6	46	67	38	63
11	36	3	52	68	44	60	19	76
1	49	65	45	57	25	77	17	33

Fig. 51.

Il est également diabolique.

Ainsi donc, pour pouvoir constituer à coup sûr des carrés magiques de modules composés, il faut au préalable faire subir certains changements au groupe naturel, changements consistant à modifier *l'arrangement* de ses lignes et de ses colonnes.

Les groupes naturels de modules composés présentent de multiples directions non magiques. Si, par la décomposition des nombres qui les constituent (tel qu'un changement de base de numération, par exemple), on rend ces directions apparentes et si, après cela, on parvient, par des permutations convenables, à les réduire aux seules directions horizontale et verticale, le groupe résultant acquerra toutes les propriétés des groupes de modules premiers ; il fournira ainsi une grande variété de carrés magiques.

Le problème des carrés magiques de modules composés réside tout entier dans cette modification du groupe naturel. On trouvera dans l'ouvrage de M. Arnoux quelques méthodes pour y parvenir. Elles sont malheureusement trop laborieuses, même pour le module 9

qui est le plus faible de ceux à considérer. Les lois qui régissent ces modifications étant déterminées, la construction de carrés magiques de modules quelconques *pairs ou impairs* ne présenterait plus aucune difficulté. On trouvera dans la Note II insérée à la fin de la deuxième partie, une solution nouvelle de la question.

Un groupe fondamental transformé étant connu, on pourra lui faire subir une permutation circulaire quelconque sans en altérer les propriétés. On en obtiendra en outre un nombre $\varphi(n)$ (1).

Ainsi dans le groupe donné ci-dessus et dont nous n'inscrivons ici que la première ligne.

(1)	1	2	3	5	6	4	9	7	8

prenons successivement la suite des colonnes de deux en deux, nous obtiendrons cinq nouveaux groupes dont les premières lignes sont

(2)	1	3	6	9	8	2	5	4	7
(3)	1	6	8	5	7	3	9	2	4
(4)	1	8	7	9	4	6	5	3	2
(5)	1	7	4	5	2	8	9	6	5
(6)	1	4	2	9	3	7	5	8	6

On ne peut aller plus loin, car on retrouve le groupe (1). On pourrait penser prendre la suite des colonnes de 5 en 5, de 7 en 7 (en un mot suivant des nombres premiers avec le module), on retrouverait les mêmes séries.

Nous donnerons encore quelques exemples de carrés déduits du groupe (1) qui nous a déjà servi.

Carré cavalier simple

$$\xi = 3x + 2y \qquad \eta = 8x + 8y$$

(1) On sait que $\varphi(n)$ que l'on appelle l'indicateur de n, représente le nombre de nombres inférieurs à n et premiers avec lui.

et : $\xi + \eta = 2x + y \qquad \eta - \xi = 5x + 6y.$

11	42	34	56	6	25	47	78	70
21	49	80	66	13	44	30	58	8
41	36	55	5	27	46	77	72	10
51	79	65	15	43	29	60	7	20
31	62	3	22	53	75	67	17	39
81	64	14	45	28	59	9	19	50
61	2	24	52	74	69	16	38	33
71	12	40	35	57	4	26	48	76
1	23	54	73	68	18	37	32	63

Fig. 52.

Carré cavalier de degré 1 *et de marche* $\xi + 3\eta$.

Ses équations sont :

$$\xi = 4x + 3y \qquad \eta = 8x + 8y$$

et par suite

$$\xi + \eta = 3x + 2y \qquad \eta - \xi = 4x + 5y.$$

11	49	55	15	53	59	16	48	63
21	36	65	22	28	69	26	32	70
41	79	3	45	74	4	37	78	8
51	62	14	52	57	18	47	58	10
31	64	24	35	68	25	30	72	20
81	2	40	73	6	44	77	7	39
61	12	54	56	13	46	60	17	50
71	23	34	66	27	29	67	19	33
1	42	80	5	43	78	9	38	76

Fig. 53.

On remarquera la corrélation entre ces deux carrés. Leurs colonnes sont constituées par les mêmes nombres et les lignes de ce dernier sont constituées par les nombres occupant les parallèles aux diagonales descendantes du carré *fig.* 52.

Carré cavalier de degré 1 *et de marche* $\xi + 4\eta$.

$$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = 8x + 8y$$

d'où :

$$\xi + \eta = 4x + 3y$$

et :

$$\eta - \xi = 3x + 4y.$$

11	36	3	52	68	44	60	19	76
21	79	14	35	6	46	67	38	63
41	62	24	73	13	29	9	48	70
51	64	40	56	27	75	16	32	8
31	2	54	66	43	59	26	78	10
81	12	34	5	52	69	37	58	20
61	23	80	15	28	4	47	72	39
71	42	55	22	74	18	30	7	50
1	49	65	45	57	25	77	17	33

Fig. 54.

Ce carré se déduit aussi du précédent suivant la même loi. On ferait la même constatation pour les carrés de marche $(\xi + 5\eta)$ et de marche $(\xi + 6\eta)$. Il est inutile de les construire. Nous nous contentons d'en indiquer les équations qui sont

$$\xi = 6x + 5y \qquad \eta = 8x + 8y$$

pour les premiers, et

$$\xi = 7x + 6y \qquad \eta = 8x + 8y$$

pour les seconds.

Passons maintenant au carré cavalier de marche $\xi + 7\eta$: c'est le dernier de la série. On ne peut plus placer un nombre quelconque du groupe dans une case quelconque. Le fait que la colonne magique doit occuper la diagonale descendante, limite le chiffre de cases dans lesquelles on peut placer le premier nombre pour constituer le carré magique.

Ci-après *fig.* 55 le carré obtenu en plaçant le nombre 68, appartenant à la colonne magique, dans la case supérieure de gauche.

68	75	47	19	8	61	36	40	15
6	59	30	38	10	71	79	54	22
13	69	77	48	20	1	62	34	45
27	4	60	32	39	11	64	80	52
43	18	67	78	50	21	2	55	35
53	25	9	58	33	41	12	65	73
28	44	16	72	76	51	23	3	56
74	46	26	7	63	31	42	14	66
57	29	37	17	70	81	49	24	5

Fig. 55

On constatera la persistance de la loi indiquée. Dans tous ces carrés cavaliers, les colonnes sont constituées par les mêmes nombres disposés dans le même ordre. Les équations correspondant à ce dernier carré sont :

$$\xi = 8x + 7y \qquad \text{et} \qquad \eta = 8x + 8y.$$

La diagonale descendante $\eta - \xi = y$ est donc bien constituée par la colonne magique du groupe.

Ce groupe transformé fournirait également des carrés à ordonnance oblique de divers degrés. On peut aussi, comme pour les modules premiers, en tirer des cavaliers à ordonnance et degré de la forme $(\alpha\xi + \beta\eta)$.

Ainsi le carré magique

60	68	3	11	19	44	52	36	76
53	79	63	67	6	14	21	38	46
41	48	29	73	62	70	9	13	24
16	27	40	51	32	75	56	64	8
66	2	10	26	43	54	31	78	59
81	58	69	5	12	20	37	53	34
47	28	80	61	72	4	15	23	39
22	42	50	30	74	55	71	7	18
1	17	15	45	49	33	77	57	65

Fig. 56.

a pour marche $(\xi + 4\eta)$ et pour degré $(3\xi - \eta)$. Les équations correspondantes sont

$$\xi = 8x + y \qquad \eta = 5x + 2y$$

d'où :

$$\xi + \eta = 4x + 3y \qquad \eta - \xi = -3x + y = 6x + y.$$

On voit donc que la variété des carrés fournis par un groupe transformé est très grande. Mais il n'est pas possible de former tous les types de carrés que peuvent donner les groupes de modules premiers. Il y a à cela un obstacle résultant de la nature même du module. On ne pourra jamais constituer un carré dont le degré ne serait pas premier avec le module. Voilà donc une restriction importante et par suite, une réduction du nombre de types que l'on pourrait concevoir à priori.

Les développements qui précèdent montrent suffisamment la nature des difficultés auxquelles on se heurte dans la construction des carrés magiques de modules non premiers. Une transformation convenable du groupe naturel fait, nous l'avons montré, disparaître ces difficultés. Mais le groupe naturel et ceux qui s'en déduisent, par permutations circulaires et autres, ne doivent pas, on l'a vu par

de nombreux exemples, être abandonnés. Ils fournissent aussi de nombreux carrés magiques de types divers.

En s'imposant comme condition que les paramètres des deux directions qui doivent constituer les directions principales du carré soient premiers avec le module (avec bien entendu la condition évidente que le déterminant $ab' - ba'$ soit aussi premier avec ce module), on peut aisément établir que, pour le module 9, les seuls carrés magiques possibles à ordonnance oblique sont ceux des degrés 1, 4 et 7 ; et l'on en construira un très-grand nombre.

Ci-après un exemple pour chacun d'eux. Les deux premiers (fig. 57 et 58), sont déduits du groupe naturel, dans lequel la ligne médiane a été portée au premier rang.

Carré oblique de degré 1

$$\xi = 2x + y \qquad \eta = 8x + 8y$$

d'où

$$\xi + \eta = x \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 6x + 7y.$$

La diagonale descendante ne sera pas nécessairement magique ; il faut, pour sa magie, qu'elle ne comprenne que des nombres appartenant exclusivement aux colonnes 2, 5 et 8.

2	13	24	35	46	57	68	79	45
12	23	34	54	56	67	78	44	1
22	33	53	55	66	77	43	9	11
32	52	63	65	76	42	8	10	21
51	62	64	75	41	7	18	20	31
61	72	74	40	6	17	19	30	50
71	73	39	5	16	27	29	49	60
81	38	4	15	26	28	48	59	70
37	3	14	25	36	47	58	69	80

Fig. 57

Carré oblique de degré 4

$$\xi = 8x + 7y \quad . \quad \eta = 2x + 2y$$

d'où

$$\xi + \eta = x \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 3x + 4y.$$

Ici aussi, la diagonale descendante présentera la même particularité que dans le carré ci-dessus.

71	52	24	5	76	57	29	10	45
51	23	4	75	56	28	18	44	70
22	3	74	55	36	17	43	69	50
2	73	63	35	16	42	68	49	21
81	62	34	15	41	67	48	20	1
61	33	14	40	66	47	19	9	80
32	13	39	65	46	27	8	79	60
12	38	64	54	26	7	78	59	31
37	72	53	25	6	77	58	30	11

Fig. 58

Carré oblique de degré 7

$$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = 5x + 5y$$

d'où

$$\xi + \eta = x \qquad \eta - \xi = y$$

Ces équations montrent aussi que les diagonales sont constituées par la ligne et la colonne magiques du groupe. Pour le construire

facilement, il suffit de placer le nombre médian 41 au centre du carré. Ici le groupe naturel n'a subi aucun changement.

77	28	69	20	61	12	53	4	45
36	68	19	60	11	52	3	44	76
67	27	59	10	51	2	43	75	35
26	58	18	50	1	42	74	34	66
57	17	49	9	41	73	33	65	25
16	48	8	40	81	32	64	24	56
47	7	39	80	31	72	23	55	15
6	38	79	30	71	22	63	14	46
37	78	29	70	21	62	13	54	5

Fig. 59

Ce groupe naturel fournira aussi des carrés cavaliers ; les paramètres satisfaisant aux conditions prescrites, les seuls carrés cavaliers du premier degré possibles sont ceux dont le pas est égal à 4 ou à 7. Ci-après deux exemples.

Carré cavalier de degré 1 et de marche $\xi + 4\eta$

Ses équations sont

$$\xi = 5x + 4y \quad \text{et} \quad \eta = 8x + 8y$$

d'où

$$\xi + \eta = 4x + 3y \quad \text{et} \quad \eta - \xi = 3x + 4y.$$

Par suite, la case de départ ne peut plus être arbitrairement choisie, la magie des diagonales ne pouvant pas être ainsi assurée. Mais si nous construisons le carré sans nous inquiéter de cette res-

triction, nous savons que ses lignes et ses colonnes seront magiques; nous savons aussi que, parmi les lignes parallèles à ses deux directions diagonales, quelques-unes seulement présenteront la magie cherchée. Il faut donc les déterminer : formons d'abord un carré *quelconque* du type indiqué; cherchons ensuite, parmi les parallèles aux deux diagonales, celles qui sont magiques. Quelques tatonnements montreront que celles qui se croisent sur le nombre 11, forment une des solutions. Permutons donc circulairement les lignes et les colonnes du carré provisoirement constitué, de façon à amener ce nombre au centre du carré et le problème sera résolu (fig. 60).

77	28	69	20	61	12	53	4	45
6	38	79	30	71	22	63	14	46
16	48	8	40	81	32	64	24	56
26	58	18	50	1	42	74	34	66
36	68	19	60	11	52	3	44	76
37	78	29	70	21	62	13	54	5
47	7	39	80	31	72	23	55	15
57	17	49	9	41	73	33	65	25
67	27	59	10	51	2	43	75	35

Fig. 60

Carré cavalier de degré 1 *et de marche* $\xi + 7\eta$

Les équations sont

$$\xi = 8x + 7y \qquad \eta = -x - y$$

d'où

$$\xi + \eta = 7x + 6y \qquad \eta - \xi = -8y = y.$$

La diagonale descendante est donc constituée par la ligne magique, ce que l'on savait déjà.

23	4	66	47	28	18	80	61	42
33	14	76	57	38	19	9	71	52
43	24	5	67	48	29	10	81	62
53	34	15	77	58	39	20	1	72
63	44	25	6	68	49	30	11	73
64	54	35	16	78	59	40	21	2
74	55	45	26	7	69	50	31	12
3	65	46	36	17	79	60	41	22
13	75	56	37	27	8	70	51	32

Fig 61

On pourrait de même rechercher les carrés cavaliers à marche plus complexe qu'il serait possible de former.

Ainsi reprenons un exemple précédent

$$\xi = -x + 2y \quad \text{et} \quad \eta = x - y$$

La diagonale montante est constituée par la colonne magique du groupe. Un nombre de cette colonne est donc commun aux deux diagonales. Essayons les divers nombres de la colonne magique en les plaçant successivement au centre du carré et cherchons ceux qui rendent magique la seconde diagonale. Nous constaterons que seuls les nombres 41, 77 et 23 satisfont à la question.

Le carré ainsi formé aurait pour marche $(2\xi + \eta)$ et pour degré $(3\xi + 2\eta)$.

Soient encore les équations

$$\xi = 5x + 2y \quad \text{et} \quad \eta = 5x + 4y.$$

La diagonale descendante $\eta - \xi = 2y$ est constituée par la

colonne magique du groupe. Plaçons le nombre 5 de cette colonne dans la case inférieure de droite du carré et nous obtiendrons le carré ci-dessous qui a pour marche $4\xi + 7\eta$ et pour degré $(3\xi - \eta)$.

77	1	15	20	34	39	53	58	72
63	68	73	6	11	25	30	44	49
40	54	59	64	78	2	16	21	35
26	31	45	50	55	69	74	7	12
3	17	22	36	41	46	60	65	79
70	75	8	13	27	32	37	51	56
47	61	66	80	4	18	23	28	42
33	38	52	57	71	76	9	14	19
10	24	29	43	48	62	67	81	5

Fig. 62

Si l'on examine l'ordonnance des nombres de chacune des colonnes du groupe naturel, on constate qu'elle est oblique à gauche et que le premier nombre d'une colonne a, par rapport au dernier nombre de la colonne précédente, une situation définie aussi par $(3\xi - \eta)$. Ce carré pourrait aussi être déduit d'un groupe dont la première ligne aurait pour éléments 77, 75, 73, 80, 78, 76, 74, 81, 79, et dont la première colonne serait constituée par la suite 77, 5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68 ; il suffira pour cela de donner aux nombres de ce groupe l'ordonnance $(\xi + 4y)$, le degré du carré étant 4.

Nous donnerons encore quelques exemples de carrés tirés du groupe naturel, en nous contentant d'en indiquer les équations.

1° $\xi = 5x - 4y \qquad \eta = x + 2y$

on placera dans la case origine l'un des nombres 2, 29, 56 de la deuxième colonne et ceux pris de trois en trois à partir de ces der-

niers, en ligne ou en colonne, soient les nombres 5, 32, 59 et 8, 35, 62.

2° $$\xi = 7x + y \qquad \eta = x + 2y$$

on placera dans la case origine l'un des nombres :

18, 45, 72, 12, 39, 66, 15, 42, 69.

3° $$\xi = 5x + 4y \qquad \eta = x + 7y$$

le nombre 80 placé à l'origine donne un carré magique dont les diagonales sont

↗ 80. 14. 29. 53	68	2. 26. 41. 56
↘ 16. 65. 42. 10	68	45. 13. 71. 39

Les nombres pris avec un intervalle de trois, en ligne ou en colonne, à partir de 80 produisent également la magie complète.

4° $$\xi = x - y \qquad \eta = 5x + 2y$$

La magie des carrés correspondants peut être obtenue en plaçant à leur origine l'un des nombres 29, 32 ou 35.

Les diagonales de ces trois carrés sont

↗ 29. 44. 50. 56	71	77. 2. 17. 23
↘ 15. 65. 43. 12	71	40. 18. 68. 37

↗ 32. 38. 53. 59	65	80. 5. 11. 26
↘ 18. 68. 37. 15	65	43. 12. 71. 40

↗ 35. 41. 47. 62	68	74. 8. 10. 20
↘ 12. 71. 40. 18	68	37. 15. 65. 43

On remarquera que dans ces trois carrés, la diagonale descendante est constituée par les mêmes nombres ; leur ordre seul a changé.

Quand une des diagonales du carré n'est pas constituée par une ligne ou une colonne du groupe, les équations des deux directions principales permettent de limiter les recherches relatives à la détermination du nombre à placer dans la case origine. On peut, avec ces équations, déterminer une des colonnes à laquelle appartiendra ce premier nombre. Il suffira pour cela d'écrire que la somme des nombres de la diagonale est égale à la constante du carré. L'équation résultante est une congruence de module n qui indiquera *la colonne* à laquelle doit appartenir le nombre cherché.

Toutes les considérations qui précèdent s'appliquent à un module impair non premier quelconque. Il serait donc superflu de nous répéter. Cependant, avant de terminer ce chapitre et pour bien montrer l'esprit de nos méthodes, nous dirons quelques mots des carrés de module 15.

Au fur et à mesure que le module augmente, les recherches et vérifications deviennent naturellement plus laborieuses. Mais si l'on a bien saisi tout ce qui a été dit, on peut voir que les vérifications à faire se réduisent le plus souvent à deux ou trois additions. La constante magique, pour le module 15, est 1695.

Considérons dans le groupe naturel les deux directions,

$$\xi = 4x + y \qquad \eta = 8x - 2y$$

que nous adopterons comme directions principales du carré. Le déterminant des paramètres est bien premier avec le module. Les diagonales du carré sont déterminées par

$$\xi + \eta = 12x - y \qquad \eta - \xi = 4x - 3y,$$

Si l'on cherche la colonne à laquelle appartiendra le nombre à placer dans la case origine, le calcul indiquera que c'est celle de

rang 14. Et l'on trouve en effet que le nombre 134, appartenant à cette colonne donne les deux diagonales.

↗	134. 116. 98. 80. 62. 59. 41.	23	5. 212. 209. 191. 173. 157. 137.
↘	156. 197. 28. 69. 110. 151. 207.	23	64. 120. 161, 202. 18. 74. 115.

qui sont bien magiques. Il est inutile de faire la même vérification pour les lignes et les colonnes, car les deux équations données répondent, on le sait, à des directions magiques.

En adoptant comme nombre de début, les nombres, qui dans le groupe, suivent 134 de trois en trois en ligne ou en colonne, on obtient également des diagonales magiques. Exemples :

↗	131. 113. 95. 77. 74. 56. 38	20	2. 224, 206. 188. 170. 152. 149.
↘	153. 209. 25. 66. 107. 163. 204.	20	61. 117. 158. 199. 30. 71. 112.

↗	173. 155. 137. 134. 116. 98. 80.	62	59. 41. 23. 5. 212. 209. 191.
↘	210. 26. 67. 108. 164. 205. 21.	62	118. 159. 200. 16. 72. 113. 154.

Les nombres pris avec un intervalle de cinq, ne donnent pas de carrés magiques.

Soient encore les équations

$$\eta = 11x + 7y \quad \text{et} \quad \eta = 7x - 2y$$

qui définissent des directions magiques. Le carré paraît donc possible. Et en effet, le nombre 32, appartenant à la deuxième colonne du groupe naturel, placé à l'origine du carré, donne les deux diagonales magiques

↗	32. 110. 188. 41. 119. 182. 35	113	191. 44. 107. 185. 38. 116. 194.
↘	70. 209. 108. 22. 161. 75. 199	113	27. 151. 65. 204. 118. 17. 156.

En débutant par les nombres 35 et 38 qui, dans le groupe naturel, se trouvent *dans la même ligne* que 32, on forme aussi des carrés dont les diagonales sont magiques.

Ces diagonales sont :

↗	35.113.191.44.107.185.38	116	194.32.110.188.41.119.182,
↘	73.197.111.25.164.63.202	116	30.154.68.207.106.20.159.

↗	38.116.194.32.110.188.41	119	182.35.113.191.44.107.185.
↘	61.200.114.28.152.66.205	119	18.157.71.210.109.23.162.

on constatera que la diagonale montante est, pour ces trois carrés, constituée par les mêmes nombres dont l'ensemble a subi une simple permutation circulaire.

Ces trois nombres sont les seuls qui satisfont au problème. Les nombres, pris de trois en trois ou de cinq en cinq à partir de ceux-là, ne fournissent pas de carrés magiques. Cela tient au fait que les paramètres de la diagonale montante $\xi + \eta = 3x + 5y$ sont précisément les deux facteurs du module 15 et l'on peut en inférer à priori que les lignes magiques dans cette direction sont forcément en nombre très limité.

Le carré fourni par les équations précédentes est cavalier de marche $(7\xi + 2\eta)$ et de degré $(9\xi - \eta)$.

Les paramètres des deux directions principales étant premiers avec le module, le groupe naturel de module 15 fournit un grand nombre de carrés obliques des degrés 1, 7 et 13 et aussi des carrés cavaliers simples de marche $(\xi + 7\eta)$ et $(\xi + 13\eta)$.

L'indicateur 15 du module étant égal à 8, il y a huit valeurs positives et autant de valeurs négatives pour chacun des quatre paramètres ; mais la condition que $(ab' - ba')$ soit premier avec le module, réduit notablement le nombre de combinaisons possibles.

Pour qu'un groupe du module 15 (ou de tout autre module composé) puisse fournir *tous les carrés* obliques et cavaliers *compatibles avec le module*, il faut transformer le groupe de façon à ramener ses directions non magiques aux seules directions principales.

Dans tous les cas, un groupe naturel de module composé impair n, donnera toujours de nombreux carrés à ordonnance oblique des degrés 1, $\frac{n-1}{2}$ et $n-2$ et aussi des carrés cavaliers de premier degré dont l'ordonnance sera définie par

$$\left(\xi + \frac{n-1}{2}\eta\right) \quad \text{et} \quad \xi + (n-2)\eta.$$

Il fournira également d'autres carrés de marches et de degrés moins simples, que l'on pourra déterminer en partant de deux équations convenablement choisies pour les deux directions principales.

La première partie de ce travail devrait s'arrêter ici, car nous pensons avoir rempli le programme que nous nous étions imposé. Nous ne le terminerons pas cependant, sans mentionner encore deux méthodes générales et relativement simples pour la constitution de carrés magiques de modules composés de types différents de ceux déjà décrits, les procédés exposés plus haut permettant d'ailleurs d'en multiplier considérablement le nombre.

Soit un module $n = pq$, p et q étant supposés premiers. On commencera par former deux carrés ayant p et q pour modules. On remplacera ensuite chacun des nombres de l'un de ces carrés, celui de module p par exemple, par son produit avec q^2. Cette opération n'altèrera évidemment pas la magie du carré. Ceci fait, on substituera au nombre contenu dans chacune des cases de ce nouveau carré, la somme de ce nombre avec chacun des nombres du carré de module q déjà construit. Par cette opération, chacune des cases

du carré magique de module p contiendra q^2 nombres. Ce carré en aura donc p^2q^2 et il sera magique.

On remarquera qu'ainsi construit il sera constitué par les nombres de la série naturelle, dont le premier terme serait $(1 + q^2)$. Il suffira par suite de retrancher q^2 de chacun de ces nombres pour avoir un carré constitué par les $n^2 = p^2q^2$ premiers nombres naturels.

La méthode s'applique à un module composé de nombres premiers quelconques ([1]). Quand on aura construit un carré de module $n = pq$, on construira en appliquant la même règle, le carré de module pqr, et ainsi de suite pour un plus grand nombre de facteurs.

Ci-après deux carrés de modules 9 et 15 construits en appliquant cette méthode. Le premier est constitué au moyen de deux carrés identiques de module 3, et le second au moyen du même carré de 3 et d'un cavalier simple de module 5.

31	30	35	22	21	26	67	66	71
36	32	28	27	23	19	72	68	64
29	34	33	20	25	24	65	70	69
76	75	80	40	39	44	4	3	8
81	77	73	45	41	37	9	5	1
74	79	78	38	43	42	2	7	6
13	12	17	58	57	62	49	48	53
18	14	10	63	59	55	54	50	46
11	16	15	56	61	60	47	52	51

Fig. 63.

([1]) Il n'est même pas nécessaire de supposer des facteurs premiers. Il suffit, pour l'appliquer, de savoir construire un carré ayant pour module chacun des facteurs.

62	55	60	179	172	177	26	19	24	98	91	96	215	208	213
57	59	61	174	176	178	21	23	25	93	95	97	210	212	214
58	63	56	175	180	173	22	27	20	94	99	92	211	216	209
116	109	114	188	181	186	80	73	78	152	145	150	44	37	42
111	113	115	183	185	187	75	77	79	147	149	151	39	41	43
112	117	110	184	189	182	76	81	74	148	153	146	40	45	38
170	163	168	17	10	15	134	127	132	206	199	204	53	46	51
165	167	169	12	14	16	129	131	133	201	203	205	48	50	52
166	171	164	13	18	11	130	135	128	202	207	200	49	54	47
224	217	222	71	64	69	143	136	141	35	28	33	107	100	105
219	221	223	66	68	70	138	140	142	30	32	34	102	104	106
220	225	218	67	72	65	139	144	137	31	36	29	103	108	101
8	1	6	125	118	123	197	190	195	89	82	87	161	154	159
3	5	7	120	122	124	192	194	196	84	86	88	156	158	160
4	9	2	121	126	119	193	198	191	85	90	83	157	162	155

Fig. 64

Cette méthode est donnée par M. Arnoux sous le nom de *méthode des carrés mineurs.*

La suivante donne des carrés de composition différente; afin d'en simplifier l'exposition, nous la spécialiserons pour un module ayant le nombre 3 comme facteur. Soit donc un module $n = 3K$. Pour pouvoir l'appliquer, il suffit de savoir construire un carré de module K.

On assemblera les lignes et les colonnes du groupe naturel en trois séries, sans en modifier l'ordre. Le groupe se trouvera ainsi divisé en neuf compartiments contenant chacun K lignes et K colonnes. Chacun de ces compartiments constitue un groupe fondamental de

module K, pouvant donner naissanee à de nombreux carrés. Les constantes de ces neuf groupes sont en progression arithmétique en ligne et en colonne (la raison étant d'ailleurs différente, suivant que l'on considère les lignes ou les colonnes). Ces constantes forment donc aussi un groupe fondamental de module 3. Construisons un carré magique déduit de ce dernier groupe et remplaçons ensuite le nombre occupant chacune de ses cases par un des carrés magiques ayant ce nombre pour constante. Le carré magique de module 3 K sera ainsi constitué.

Appliquons ceci aux groupes naturels de modules 9, 15 et 21.

Le premier de ces groupes divisé en neuf compartiments donne, avec les constantes relatives à chacun d'eux, le groupe fondamental auxiliaire.

33 . 42 . 51
114 . 123 . 132
195 . 204 . 213

Fig. 65

dont on déduira par la règle connue le carré magique fig. 66 dont la constante est 369.

42	195	132
213	123	33
114	51	204

Fig. 66

En remplaçant chacun des termes de ce carré par un carré magique déduit du groupe correspondant, on obtiendra un carré magique de module 9.

Le groupe de module 15, divisé en neuf compartiments constitués

chacun par 25 nombres, donnera avec les constantes de chacun d'eux le groupe fondamental

165 .	190 .	215
540 .	565 .	590
915 .	940 .	965

Fig. 67

dont on déduira le carré fig. 68 ayant pour constante 1 695.

540	215	940
965	565	165
190	915	590

Fig. 68

On remplacera chacun des termes par un des nombreux carrés de module 5 que l'on sait construire.

Pour le module 21, on aura le groupe fondamental

469.	518.	567
1 498.	1 547.	1 596
2 527.	2 576.	2 625

Fig. 69

dont on déduira le carré (fig. 70) ayant 4 641 pour constante magique.

518	2527	1596
2625	1547	469
1498	567	2576

Fig. 70

On remplacera chacun des termes par un des carrés de module 7 que l'on tirera du groupe correspondant.

Le lecteur pourra, pour les carrés formés suivant la première de ces deux méthodes, établir des rapprochements intéressants en considérant les dispositions relatives des plus petits nombres de chacun des carrés partiels dont l'ensemble constitue le carré de module pq.

On étendra aisément ces deux procédés à un module composé d'un nombre quelconque de facteurs.

NOTE

DES DIVERS MODES DE GÉNÉRATION RÉGULIÈRE D'UN MÊME CARRÉ

On a vu par divers exemples, qu'un même carré peut être déduit de groupes fondamentaux différents. Ce que l'on a appelé son degré peut ainsi varier. Ce degré a une importance relative ; l'essentiel dans un carré magique, ce qui le caractérise, est l'*ordonnance* adoptée pour la suite des nombres.

Ainsi le carré suivant, à ordonnance oblique tiré du groupe naturel dont on a transporté la ligne magique au premier rang, est de degré $(2\xi - 2\eta)$.

13	33	46	3	16	36	28
32	45	2	15	42	27	12
44	1	21	41	26	11	31
7	20	40	25	10	30	43
19	39	24	9	29	49	6
38	23	8	35	48	5	18
22	14	34	47	4	17	37

Fig. 71

On peut aussi le considérer comme étant de degré 3, si on prend les lignes du groupe dans l'ordre

22. 43. 36. 29. 15. 8. 1.

Le carré oblique ci-dessous, tiré du groupe naturel dont la ligne magique a été portée au premier rang, est de degré $(3\xi - 3\eta)$.

45	41	30	19	8	4	28
40	29	18	14	3	27	44
35	17	13	2	26	43	39
16	12	1	25	49	38	34
11	7	24	48	37	33	15
6	23	47	36	32	21	10
22	46	42	31	20	9	5

Fig. 72

Ce serait un carré de degré 4, si on le déduisait du groupe dont l'ordre des lignes serait

22. 15. 43. 8. 36. 1. 29.

Le carré ci-dessous, oblique tiré du groupe naturel dont la ligne magique seule a été déplacée pour être portée au premier rang, est de degré $(-\xi - 2\eta)$, ce qui équivaut on le sait à $(6\xi + 5\eta)$.

3	13	16	33	36	46	28
12	15	32	42	45	27	2
21	31	41	44	26	1	11
30	40	43	25	7	10	20
39	49	24	6	9	19	29
48	23	5	8	18	35	38
22	4	14	17	34	37	47

Fig. 73

Il serait de degré 4 pour le groupe fondamental dont l'ordre des lignes serait

22. 29. 1. 36. 8. 43. 15.

Il serait de degré $(4\xi + 2\eta)$ pour le groupe dont les lignes se présenteraient dans l'ordre

22. 8. 29. 43. 1. 15. 36

de degré $(2\xi - \eta)$ pour le groupe

22. 15. 43. 8. 36. 1. 29

de degré 5ξ pour le groupe

22. 36. 15. 1. 43. 29. 8

et enfin de degré $(3\xi - 3\eta)$ pour le groupe

22. 43. 36. 29. 15. 8. 1.

En résumé, la variation du degré dépend, c'est de toute évidence de la modification de l'arrangement des lignes du groupe naturel.

Les carrés à disposition cavalière donnent lieu à des remarques analogues.

Ainsi le carré (fig. 26) pour lequel on a indiqué deux modes de génération, est aussi cavalier de 5 pas et de degré $(-\xi + \eta)$ pour le groupe dont les lignes seraient dans leur ordre naturel.

Le carré (fig. 23) est cavalier simple de degré 4 pour le groupe dont les diverses lignes seraient disposées dans l'ordre 1. 22. 43 15. 36. 8. 29.

Celui (fig. 50) est cavalier de 4 pas et de degré 7 pour le groupe dans lequel les lignes se trouveraient dans l'ordre

1. 46. 64. 37. 55. 19. 73. 10. 28,

Celui (fig. 51) peut, par la marche ($-\xi-2\eta$), être déduit du groupe

1. 19. 46. 73. 64. 10. 37. 28. 55.

On pourrait multiplier les exemples. Tous ces résultats peuvent tre établis par le calcul.

CHAPITRE XI

ASTROLOGIE

Les astrologues enseignaient qu'ils prédisaient l'avenir et que, jusqu'à un certain point, il leur était possible de diriger les événements futurs. Nous nous proposons dans ce chapitre d'exposer d'une façon sommaire les règles sur lesquelles ils se basaient pour arriver à un tel résultat ([1]).

Nous ne cherchons pas, dans cette étude de l'astrologie, à remonter à une époque antérieure au Moyen âge, car les lois sur lesquelles s'appuyaient les anciens astrologues ne sont pas connues avec assez d'exactitude. D'ailleurs, et aucun doute n'est possible à ce sujet, aussi loin que nos renseignements historiques remontent dans le passé, nous trouvons que cet art fut d'abord pratiqué en Orient, puis de là transporté en Egypte, en Grèce et à Rome, et que les astrologues du Moyen âge n'ont fait que s'inspirer des travaux de leurs prédécesseurs. Il est probable que les règles à cette époque ne différaient pas essentiellement de celles que nous donnons dans ce cha-

([1]) Nous avons puisé beaucoup de nos renseignements dans le *Manual of Astrology* par Raphaël — dont le nom véritable était R. C. Smith — Londres, 1828 ; et dans les écrits de Cardan, spécialement dans ses commentaires sur Ptolémée et dans son *Geniturarum exempla*. Plusieurs de nos références et de nos citations sont empruntées à l'ouvrage de Whewel : *History of the Inductive Science* ; à divers ouvrages de Raphaël, publiés à Londres entre 1825 et 1832 ; et à un opuscule de M. Uhlemann, intitulé *Grundzüge der Astronomie und Astrologie*, Leipzig, 1857.

pitre [1] et nous pouvons ajouter que les devins les plus intelligents reconnaissaient eux-mêmes que les principes de leur science n'étaient pas d'une rigueur absolue. Disons enfin que l'Astrologie peut être considérée, historiquement parlant, comme ayant pris fin après la reconnaissance générale des théories de Copernic. A partir de ce moment, la pratique de cette science fut négligée peu à peu et elle tomba rapidement dans le domaine des imposteurs.

Toutes les règles de l'Astrologie du Moyen âge — qui sont les seules dont nous nous occupons — sont basées sur l'Astronomie de Ptolémée et ont leur origine dans le *Tetrabiblos* [2] qui paraît (ce qui est peut-être faux), avoir été écrit par Ptolémée lui-même. Cette science fut ensuite développée par de nombreux auteurs, spécialement par Albohazen [3] et Firmicus. Ce dernier a résumé les résultats obtenus par la plupart de ses prédécesseurs en un volume [4] qui a fait autorité jusqu'à la fin du xvie siècle.

Commençons d'abord par rappeler à nos lecteurs que, s'il y avait accord parfait en ce qui concerne les méthodes d'observations et d'interprétations (que seules nous nous proposons de décrire), il n'existait pas un code uniforme pour les règles à appliquer, ou un ouvrage faisant loi. Il est, par conséquent, difficile de donner aux règles des formes bien nettes et bien précises, et presque impossible, surtout dans le court espace d'un chapitre, d'examiner et de discuter toutes les conséquences pouvant se déduire d'une observation. Mais comme la pratique élémentaire de cette science repose sur des principes uniformes suffisamment établis, nous ne doutons pas que le faible aperçu que nous présentons soit exact dans les limites restreintes que nous nous sommes imposées.

(1) Au sujet de l'influence attribuée aux planètes, voir *The dialogue of Bardesan on Fate*, traduit par W. Cureton dans le *Spicilegium Syriacum*, Londres, 1855.

(2) Il en existe une traduction anglaise par J. Wilson, Londres (s.d) ; et on en trouve une traduction française dans l'édition de Halma des œuvres de Ptolémée.

(3) *De judiciis astrorum*, ed. Liechteinsten, Bâle, 1571.

(4) *Astronomicorum*, 8 livres, Venise, 1499.

Dans leurs recherches les Astrologues avaient en vue deux problèmes distincts. L'un consistait à déterminer sous une forme générale, et dans ses grandes lignes, la vie et la fortune de la personne qui consultait ; c'est ce qu'on appelait l'*Astrologie de naissance* et on obtenait le résultat demandé en établissant un *schéma de naissance*. L'autre avait pour objet de répondre à certaines questions particulières concernant la personne qui cherchait à se renseigner, et était connu sous le nom d'*Astrologie horaire*. Ces deux problèmes dépen-



Fig. 74

daient de la recherche ou de l'établissement d'un *horoscope*. La personne qui en était le sujet était appelée « *le Natif* ».

Un horoscope se *dressait* d'après les règles suivantes (1) : l'espace entre deux carrés concentriques et semblablement placés était divisé en douze régions, comme on le voit sur la figure ci-dessus. Ces régions portaient le nom de *maisons*, elles étaient numérotées de 1 à 12 et s'appelaient la 1re maison, la 2e maison, la 3e maison,... et

(1) *Raphaël*, pp. 91-109

ainsi de suite. Les lignes séparatives de ces divers espaces étaient des *cusps,* la ligne entre les maisons 12 et 1 était la *cusp* de la maison 1, la ligne entre 1 et 2 était la *cusp* de la maison 2 et ainsi de suite, finalement la ligne entre 11 et 12 était la *cusp* de la maison 12. Chaque maison avait également une désignation spéciale ; ainsi la 1re maison était la maison de l'ascendance, la huitième était la maison de la mort, et ainsi de suite ; mais comme ces désignations nous sont inutiles pour le moment nous les passerons sous silence.

On indiquait ensuite sur la sphère céleste, les positions occupées par les divers signes astrologiques et les planètes à une époque et pour un lieu déterminés (par exemple l'époque et le lieu de la naissance du *Natif,* si son horoscope de naissance avait été dressé). Cette sphère céleste était divisée en douze fuseaux sphériques égaux au moyen de grands cercles passant par le zénith et dont les plans formaient entre eux des angles de 30°. Le premier cercle passait par l'orient, c'est-à-dire par l'est, et l'espace qu'il limitait avec le cercle voisin du côté nord correspondait à la première maison et était quelquefois appelé la première maison. Le fuseau à la suite en allant de l'est vers le nord correspondait à la seconde maison, et ainsi de suite. En résumé, chacun des fuseaux sphériques était le correspondant d'une des douze maisons, et chacune des demi-circonférences limites correspondait à une *cusp*.

En traçant (1) un horoscope, il était d'usage de commencer par indiquer les signes du zodiaque. Chaque signe du zodiaque, s'étendant sur 30°, était marqué sur la *cusp* qui le partageait, et par côté on inscrivait la distance représentant la limite de son influence dans la maison dont la *cusp* dépendait. On déterminait ensuite les positions des planètes dans chaque signe et chacune d'elles était placée dans la maison afférente et dans le voisinage de la *cusp* appartenant au signe du zodiaque dans lequel la planète était située ; on l'accompagnait d'un nombre représentant son ascension droite mesurée de l'origine du signe. Le nom de la personne dont on tirait

(1) *Raphaël*, pp. 118-131.

l'horoscope, et la date à laquelle il correspondait étaient généralement écrits dans le carré central. La figure que l'on voit plus loin, page 81, est un fac-simile de l'horoscope d'Edouard VII tracé par Cardan et pourra servir à rendre plus claires les explications qui suivent.

Nous pouvons expliquer maintenant comment un horoscope était *lu* ou *interprété*. A chaque maison correspondaient certaines questions définies ou certains sujets, et la réponse dépendait de la présence ou de l'absence, dans cette maison, de signes ou de planètes variables suivant les cas.

Ces questions embrassaient, à peu près, tous les points sur lesquels des informations pouvaient être vraisemblablement cherchées ou demandées. On peut les classer grosso-modo comme il suit : la réponse (tout au moins en ce qui concerne le natif) à toutes les questions relatives à sa vie, à sa santé, se trouvait dans la maison n° 1 ; les questions concernant la prospérité de ses affaires dépendaient de la maison n° 2 ; pour ses alliés ou ceux ayant des rapports avec lui, on devait chercher dans la maison n° 3 ; pour ses parents, on avait la case n° 4 ; ses enfants et ses descendants dépendaient de la maison n° 5 ; la maison n° 6 était pour ses serviteurs et ses maladies ; on trouvait dans la maison n° 7 les réponses à toutes les questions relatives à son mariage et à ses affections de cœur ; la maison n° 8 renseignait sur tout ce qui concernait sa mort ; la maison n° 9 avait pour attributs ses connaissances, sa religion et ses voyages ; la maison n° 10 était pour ses affaires, son commerce, sa réputation ; la maison n° 11 était réservée à ses amis, et enfin toutes les questions concernant ses ennemis étaient du ressort de la maison n° 12.

Mentionnons maintenant brièvement l'influence des planètes et des signes du zodiaque, en faisant remarquer que, pratiquement, et dans bien des cas, les signes avaient la prépondérance sur les planètes.

Les planètes des astrologues étaient au nombre de sept, en y comprenant le soleil et la lune. C'étaient : Saturne ou la grande infor-

tune ; Jupiter ou la grande fortune ; Mars ou l'infortune atténuée ; le Soleil ; Vénus ou la fortune modérée ; Mercure et la Lune.

Chacune de ces planètes avait une double signification : en premier lieu, elle communiquait par sa présence dans une enceinte, un caractère spécifique (comme bonne fortune, faiblesse, etc.) aux affaires du *natif* et aux attributs afférents à la maison ; en second lieu elle introduisait dans la maison certaines propriétés de nature à modifier les affaires du *Natif* et les attributs de cette maison.

L'étude complète de l'influence exercée par chaque planète dans la maison où elle se trouve, exigerait des développements que nous ne pouvons donner ici, mais l'effet général produit par sa présence peut se résumer ainsi (1) ; la présence de Saturne est néfaste, celle de Jupiter favorable, celle de Mars est généralement nuisible, celle du Soleil indique la considération et un succès modéré, celle de Mercure dénote l'activité, celle de Vénus est plutôt favorable, et enfin la Lune a pour effet de refléter faiblement l'influence de la planète la plus voisine en indiquant le changement, l'inconstance. Outre les planètes, les anneaux de la Lune et quelques-unes des étoiles fixes les plus remarquables (2) exerçaient également une certaine influence sur les événements.

Ces indications, un peu vagues, seront rendues plus précises en examinant quelques cas particuliers.

En tirant un horoscope de naissance, la vie, la santé et l'existence générale du sujet étaient déterminées par la première maison, dite maison de l'ascendance ; c'est de là que vient cette locution vulgaire que la fortune d'un homme est dans son ascendance. La planète la plus favorable étant Jupiter, si, au moment de la naissance, elle se trouvait dans la première maison, le sujet pouvait espérer une vie longue, heureuse et pleine de santé ; de plus, étant né sous Jupiter, il devait avoir un caractère gai et jovial. D'un autre côté, Saturne, la planète la plus néfaste, était aussi puissant que méchant ; par

(1) *Raphaël*, pp. 70-90 ; pp. 204-209.
(2) *Raphaël*, pp. 129-131.

conséquent, si au moment de la naissance cette planète se trouvait dans la première maison, sa puissance pouvait avoir pour effet de donner une longue existence au *sujet*, mais en même temps, il devait être malheureux, d'un caractère irritable, envieux, vindicatif, dur et peu aimant, bien que constant dans ses amitiés aussi bien que dans ses haines. De même un *sujet* né sous Mercure, c'est-à-dire ayant eu cette planète dans la première maison au moment de sa naissance, devait être d'une nature vive, tandis que celui né sous Mars devait avoir des penchants guerriers.

Disons mieux, c'était une opinion répandue que Jupiter intervenait dans l'horoscope de toute personne possédant un caractère gai et heureux, quand bien même cette planète ne figurait pas dans son ascendance au moment de la naissance. De sorte que l'horoscope d'un adulte dépendait, jusqu'à un certain point, de son caractère et de sa vie antérieure. Il est à peu près inutile de faire remarquer combien il était facile d'après cela, aux astrologues, de faire coïncider les prédictions du ciel avec des faits qui leur étaient connus ou qui paraissaient probables.

Les autres maisons étaient influencées de la même manière. Par exemple, aucun astrologue ayant quelque croyance dans sa science, n'aurait voulu entreprendre un long voyage avec Saturne dans la neuvième maison, c'est-à-dire dans la maison des voyages ; et si, au moment de la naissance d'un *sujet*, Saturne paraissait dans cette maison, ce *sujet* pouvait toujours s'attendre à courir de grands risques dans ses voyages.

Chaque planète était encore affectée, plus ou moins, suivant sa position relativement à une autre planète (en conjonction, en opposition ou en quadrature) d'après des règles [1] fixes et étudiées dépendant de sa situation et de la direction de son mouvement : en particulier la distance angulaire entre le Soleil et la Lune — appelée quelquefois « le procédé de fortune » — était regardée comme ayant une importance spéciale et affectait tout l'horoscope.

[1] Voir *Raphaël*, pp. 132-170.

D'une façon générale, la conjonction était un signe favorable, la quadrature un signe défavorable et l'opposition dénotait l'ambiguité.

Non seulement chaque planète influençait les corps contenus dans la maison où elle se trouvait, mais encore elle y introduisait des éléments étrangers. Ainsi Saturne avait à sa suite les grands parents, les indigents, les laboureurs, les fossoyeurs et les ensevelisseurs. Si, par exemple, cette planète était présente dans la quatrième maison, le sujet pouvait s'attendre à un legs d'un de ses grands parents ; si elle se présentait dans la douzième maison, le sujet devait s'inquiéter des conséquences de l'inimitié d'une certaine personne, et ainsi de suite.

Pareillement, Jupiter était généralement associé avec les hommes de loi, les prêtres, les écoliers et les marchands drapiers, mais en relation avec une planète néfaste, il avait à sa suite les coquins, les fourbes et les ivrognes. Mars seul représentait les soldats (ou, avec un signe d'eau, les marins des navires de guerre), les maçons, les docteurs, les forgerons, les charpentiers, les cuisiniers et les tailleurs ; mais affecté par Mercure ou la Lune, il dénotait la présence des voleurs. Le Soleil introduisait les rois, les orfèvres et les monnayeurs ; mais, influencé par une planète néfaste, il symbolisait les faux prétendants. Vénus était accompagnée des musiciens, des fabricants de broderies et de ceux qui vivent du luxe sous toutes ses formes, mais cette planète influencée introduisait les prostituées et les tyrans. La planète Mercure était associée avec les astrologues, les philosophes, les mathématiciens, les hommes d'état, les marchands, les voyageurs, les hommes d'intellect, et les ouvriers instruits ; mais en relation avec une planète néfaste, elle dénotait la présence des gens de chicane, des procureurs, des voleurs, des exempts, des valets de pied et des domestiques. Enfin la Lune avait à sa suite les marins et tous ceux occupant des emplois modestes.

Examinons maintenant l'importance et la position des signes du zodiaque. Aussi loin que la première maison était influencée, le signe du zodiaque qui s'y trouvait exerçait une action dont l'énergie

était supérieure à celle de la planète ou des planètes, car ses indications relativement à la durée de la vie étaient considérées comme ayant une importance spéciale.

Chaque signe correspondait à une portion du corps humain : par exemple le Bélier influençait la tête, le cou et les épaules, et cette partie du corps subissait l'influence suivant la maison qui contenait le signe. De plus, chaque signe était associé avec certaines contrées et servait de liaison entre ces contrées et les éléments de la maison dans laquelle il se trouvait : ainsi le Bélier avait principalement sous sa dépendance des événements survenus en Angleterre, en France, en Syrie, à Vérone et à Naples.

Le signe de la première maison déterminait également le caractère et l'apparence du *sujet* [1]. Ainsi, né sous le signe du Bélier (*m*), le caractère du sujet était passionné ; né sous le signe du Taureau (*f*) il était fourbe et cruel ; né sous les Gémeaux (*m*), il était actif et ingénieux ; né sous le signe du Cancer (*f*), il était faible et docile ; sous le signe du Lion (*m*), généreux, résolu et ambitieux ; sous la Vierge (*f*), il était vif et abject ; sous la Balance (*m*), il était amoureux et agréable ; sous le scorpion (*f*), il était froid et réservé ; sous le Sagittaire (*m*), il était généreux, entreprenant et gai ; sous le Capricorne (*f*), il était paresseux et borné ; sous le signe du Verseau (*m*), il était honnête et constant ; et sous le signe des Poissons, il était flegmatique et efféminé.

Ces signes étaient regardés alternativement comme masculin et féminin, comme nous l'indiquons ci-dessus par les lettres (*m*) et (*f*) placées après chaque signe. Un signe masculin était favorable. L'influence heureuse de toutes les planètes situées dans la même maison était rendue par ce moyen plus puissante, tandis que leur influence pernicieuse était mitigée. Mais tous les signes féminins étaient défavorables ; leur effet direct était nuisible, ils tendaient à affaiblir l'influence heureuse des planètes sur lesquelles ils avaient de l'action (c'est-à-dire avec lesquelles ils étaient liés) et à augmenter leur mau-

[1] *Raphaël*, pp. 61-69.

vaise influence ; ces signes introduisaient aussi un élément d'inconstance dans la maison et souvent changeaient l'influence heureuse en néfaste. L'effet précis de chaque signe variait suivant la planète influencée.

Nous pensons que les quelques explications qui précèdent, si brèves qu'elles soient, suffiront pour donner au lecteur une idée générale de la manière de tirer et d'interpréter un horoscope, et nous ne voyons pas la nécessité d'entrer dans de plus longs détails. C'est d'autant moins nécessaire que les règles — spécialement en ce qui concerne l'importance relative à assigner aux diverses planètes quand leur influence était contrariée — étaient si vagues, si élastiques, que les astrologues n'éprouvaient aucune difficulté à trouver dans l'horoscope d'un *sujet* un fait quelconque de son existence sur lequel ils avaient des informations précises ou un trait quelconque du caractère qu'ils lui supposaient.

Il est certain que les charlatans savaient tirer profit de ce manque de précision, de cette incertitude, mais il n'est pas douteux, non plus, que beaucoup d'astrologues, même très scrupuleux, s'en servaient sciemment ou non. Il faut aussi remarquer que ces règles avaient été établies à une époque où les sciences exactes n'étaient pas répandues (les sciences mathématiques faisaient peut-être exception), et que si les astrologues avaient été dans l'obligation d'appliquer une série de règles invariables pour tous les horoscopes, le nombre des erreurs commises dans la prédiction des événements futurs aurait rapidement démontré que leur prétendue science ne reposait sur rien de bien sérieux. Telle qu'elle était pratiquée, les erreurs étaient encore assez nombreuses et assez apparentes pour ébranler la confiance, la foi, des hommes réfléchis. Une remarque qui a, d'ailleurs, été faite partout et de tout temps, est que les astrologues ne montraient pas une plus grande clairvoyance que leurs voisins pour surmonter les difficultés de la vie, puisque tout leur prétendu savoir ne les rendait ni plus riches, ni plus habiles, ni plus heureux. A ce point de vue, nous n'avons fait aucun progrès, car cette même observation s'applique de nos jours à cette multitude de devins et

de cartomanciennes qui vivent de la crédulité publique. Bien que ces réflexions soient pleinement justifiées par le bon sens, elles étaient souvent oubliées au milieu du danger ou simplement dans les moments difficiles de l'existence. Une prédiction sur la vie future et l'idée d'être conseillée d'une façon certaine, par les astres et les signes célestes sur le cours de nos actions répondent trop au désir de tous les hommes, et c'est avec une sorte de répugnance et comme à regret que la futilité des avis donnés fut progressivement reconnue.

Des critiques relativement au tracé des schémas ont été formulées clairement par plusieurs auteurs classiques. Cicéron (1) a fait observer qu'aucune des prédictions annoncées à Pompée, Crassus et César ne s'étaient réalisées, et il ajoutait que la distance qui nous sépare des planètes ne permettait pas d'admettre leur influence sur les humains. Il faisait également allusion à ce fait, mentionné d'une façon spéciale par Pline (2) que, bien que les horoscopes d'enfants jumeaux doivent pratiquement être identiques, il arrivait souvent que leurs existences futures présentaient de grandes différences. Comme Pline disait : chaque heure et dans chaque partie du monde, naissent des seigneurs et des esclaves, des rois et des mendiants.

En réponse à cette dernière réflexion critique, les astrologues citaient l'anecdote suivante de Publius Nigidius Figulus, célèbre astrologue romain du temps de Jules César : un incrédule ayant présenté, comme objection, les destins différents de deux personnes nées à deux instants successifs, Nigidius le pria de faire deux marques consécutives sur la masse de terre placée sur un tour qu'un potier, qui se trouvait dans leur voisinage, faisait rapidement tourner. Le tour une fois arrêté, il montra que la distance des deux marques était considérablement augmentée. Nigidius reçut le surnom de Figulus (le potier) en souvenir de cette anecdote, mais son argument,

(1) Cicéron. — *De Divinatione*, II, 42.
(2) Pline. — *Historia Naturalis*, VII, 49 ; XXIX, 1.

dit saint Augustin, qui nous a transmis ce récit [1], était aussi fragile que la poterie fabriquée par le tourneur.

D'un autre côté, Sénèque et Tacite doivent être classés parmi les écrivains qui admettaient que les astrologues pouvaient prédire l'avenir, bien que tous les deux reconnussent que leurs prédictions étaient souvent mélangées de fourberie et d'erreur. Un exemple de prédiction heureuse rappelée par le dernier de ces auteurs [2] servirait plutôt à montrer comment ceux qui professaient cette science savaient habilement varier leurs prédictions de façon à satisfaire leurs clients aussi bien qu'eux-mêmes. L'histoire roule sur la première entrevue de l'astrologue Thrasyllus et de l'empereur Tibère. Ceux qui approchaient du tyran pour traiter d'une affaire importante étaient reçus dans une retraite située sur un rocher élevé dans l'Ile de Caprée. On y accédait en suivant un sentier étroit longeant la mer, et on était accompagné d'un simple affranchi doué d'une grande force musculaire. Au retour, si l'empereur concevait le moindre doute sur la fidélité du messager, une poussée opportune envoyait dans l'océan la victime et le secret. Après que Thrasyllus admis dans cette retraite eut, au moyen de son art, renseigné l'empereur sur ce qui l'intéressait, ce dernier lui demanda s'il avait jamais calculé combien il lui restait d'années à vivre. Le narrateur raconte que l'astrologue se mit alors à examiner les astres, paraissant montrer de l'hésitation, de la crainte et une terreur croissante, puis il finit par dire que l'heure présente était critique pour lui, peut-être même fatale. Tibère l'embrassa alors en lui déclarant qu'il avait été dans le vrai, en se supposant en danger, mais qu'il n'avait plus rien à craindre, et à partir de ce moment il le prit comme confident et comme conseiller.

Reconnaissons que Thrasyllus aurait été un bien triste astrologue

(1) Saint Augustin. — *De civitate Dei*, livre V, chap. III; *Opera omnia*, édit. Migne, vol. VII, p. 143.

(2) *Annales*, VI, 22 : citation Whewel, *History of the inductive sciences*, vol. I, p. 313.

s'il n'avait pas prévu la question connaissant la réputation de Tibère et s'il n'avait pas préparé une réponse adaptée aux circonstances.

On raconte une histoire à peu près semblable de Louis XI ([1]). Ayant fait venir auprès de lui un astrologue fameux qu'il se proposait de faire mourir, il lui demanda par dérision de prouver son savoir en prédisant son propre avenir. L'astrologue répondit que sa destinée était incertaine, mais qu'elle était liée d'une façon inséparable à celle du roi, à tel point que la mort de l'un serait suivie, à quelques heures près, de la mort de l'autre. Le superstitieux monarque effrayé par cette réponse, non seulement laissa partir sain et sauf l'astrologue, mais encore fit le nécessaire pour assurer sa sécurité.

La même anecdote est encore citée au sujet d'un savant écossais qui, capturé par des pirates algériens, prédisait au Sultan, devant lequel il avait été conduit, que leurs destins étaient liés et que sa mort ne devait précéder que de quelques semaines celle du Sultan. Cette raison pouvait paraître suffisante à un barbare, mais il est probable que le savant n'aurait pas obtenu le même succès auprès d'un monarque civilisé, et certainement il s'est montré moins artiste que Thrasyllus.

Pour terminer nous mentionnerons quelques exemples d'horoscopes remarquables.

Parmi les exemples les plus heureux, énumérés par Raphaël ([2]), nous devons citer l'horoscope de W. Lilly donné dans son ouvrage *Monarchy or No Monàrchy*, publié en 1651, et par lequel il prédisait que Londres serait frappé par un fléau si terrible que le nombre des décès surpasserait celui des cercueils et des tombes, et qu'après surviendrait « un immense incendie ». Cette prédiction fut large-

([1]) *Personal Characteristics from French History*, par le baron F. Rothschild. Londres, 1896, p. 10. L'histoire a été introduite dans Quentin Durward (Chap. xv) par Sir Walter Scott.

([2]) *Manuel of Astrology*, p. 37.

ment réalisée en 1665 et en 1666. En fait, le succès de Lilly devint embarrassant pour lui, car le Comité de la Chambre des communes qui s'était réuni pour chercher les causes de l'incendie et qui l'avait finalement attribué aux papistes, pensa qu'il devait en savoir plus long qu'il ne prétendait et le somma de comparaître en sa présence le 25 octobre 1686. Nous devons, cependant, ajouter que Lilly se montra à la hauteur de la situation et sut répondre à toutes les questions.

Un bien plus curieux exemple d'une heureuse réussite est attribué à Flamsteed (1), le premier astronome royal. On raconte qu'une vieille dame qui avait perdu quelques biens fatiguait Flamsteed de ses requêtes perpétuelles, le sollicitant d'observer les astres pour lui faire retrouver ce qu'elle avait perdu. Obsédé, à la fin, de ses importunités, il se détermina à faire une prédiction pour lui montrer la folie de ce qu'elle demandait, se proposant, après l'avoir convaincue de son erreur, de lui expliquer qu'il n'y avait plus rien à espérer. En conséquence, il traça des cercles et des carrés autour d'un point qui représentait la maison de cette dame et y inscrivit un certain nombre de symboles mystiques. Tout à coup, enfonçant sa baguette dans le sol, il s'écria : « creusez ici et vous trouverez ce que vous cherchez ». La vieille dame creusa à l'endroit ainsi indiqué et effectivement trouva son trésor. Il est à présumer qu'elle eut jusqu'à la fin de ses jours une confiance illimitée dans l'astrologie.

La croyance que l'observatoire royal a été construit pour tirer des horoscopes subsiste peut-être encore, car De Morgan (écrivant en 1850) disait que « des personnes s'adressaient à Greenwich pour connaître leur destinée, et une fois même un jeune gentleman écrivit pour savoir quelle était la femme qu'il épouserait, et quels honoraires il avait à payer pour le renseignement qu'il demandait ».

Il est plus facile de donner des exemples d'horoscopes heureux

(1) L'histoire, bien que sous une forme un peu différente, est donnée dans *The London Chronicle*, du 3 décembre 1771, et on ajoute que Flamsteed attribuait le résultat obtenu à l'intervention directe du diable.

que d'horoscopes défectueux. Non seulement toutes les prédictions ambiguës ou douteuses étaient comptées comme exactes mais il est notoire qu'on se souvenait et qu'on prenait note des prophéties ayant été vérifiées par les événements futurs, tandis qu'on oubliait ou qu'on passait sous silence les exemples bien plus nombreux d'horoscopes erronés.

Comme exemples exceptionnels et authentiques de prédictions erronées, nous pouvons mentionner les douze cas réunis par Cardan dans ses *Geniturarum exempla*. Ce sont d'excellents exemples, car non seulement Cardan était l'astrologue le plus éminent de son temps, mais c'était un homme de science parfaitement honnête dans ses croyances en astrologie. Pour nos lecteurs anglais, le plus intéressant de ces horoscopes est celui concernant Edouard VI, roi d'Angleterre ; Cardan a laissé un récit complet de cet événement et a donné les raisons de l'erreur commise dans sa prédiction relativement à la mort d'Edouard.

Pour expliquer l'intervention de Cardan, nous devons dire que ce savant s'était rendu, en 1552, en Écosse pour traiter l'Archevêque de Saint-André, Jean Hamilton, qui souffrait d'un asthme et d'une hydropisie ; les médecins n'étant pas d'accord au sujet du traitement à suivre [1].

[1] Ils ont laissé, heureusement, un volumineux rapport sur le cas et sur le traitement approprié. Le seul point sur lequel il y avait accord complet était que le phlegme, au lieu d'être expectoré, s'amassait dans le cerveau du malade et que, par suite, ses facultés intellectuelles se trouvaient affaiblies. Cardan était célèbre à cause du succès obtenu dans son traitement des maladies des poumons, et ses remèdes réussirent pleinement à guérir l'asthme. Ses honoraires furent de cinq cents couronnes pour ses frais de voyage depuis Pavie, dix couronnes par jour, et le droit de soigner d'autres malades. L'archevêque lui donna deux mille trois cents couronnes en argent et de nombreux présents. Ses honoraires pour avoir traité, en même temps, plusieurs autres personnes s'élevèrent, pensons-nous, à peu près à la même somme (voir Cardan, *De libris propriis*, édition 1557, pp. 159-175 ; *Consilia medica opera*, vol. IX, pp. 124-148 ; *De vita propria*, édit. 1557, pp. 138-193 et suivantes).

De retour à Londres, Cardan s'était arrêté chez sir Jean Cheke, professeur de grec à Cambridge, qui était le précepteur du jeune prince. Six mois auparavant, Edouard avait été atteint de la rougeole, puis de la petite vérole, et il était dans un état de santé dénotant une très grande faiblesse. Ses précepteurs désiraient spécialement savoir combien d'années il pouvait vivre, et ils demandèrent à Cardan de dresser l'horoscope de naissance du jeune prince pour les renseigner à ce sujet.

Le savant Italien fut reçu en octobre, et il a donné dans son journal un récit détaillé de cette entrevue, mentionné dans *Geniturarum exempla*. Le roi, dit-il (2), « était d'une taille un peu au-dessous de la moyenne, il avait une figure pâle, avec des yeux gris, un visage grave, bienséant et beau. Il était plutôt d'un tempérament maladif que souffrant réellement d'une maladie bien définie, et il avait l'omoplate d'une des épaules quelque peu en saillie ». Mais, continue Cardan, c'était un jeune homme d'un esprit extraordinaire et qui promettait beaucoup. Agé, à cette époque, de quinze ans environ, il était déjà bon musicien, dialecticien habile. Il avait un maître pour le latin, l'anglais et le français et était suffisamment avancé pour le grec, l'italien et l'espagnol. « Il s'annonçait comme devant être un homme bon et instruit ; ses manières étaient gracieuses..... Quand son visage revêtait une gravité royale, vous auriez cru voir un homme mûr et réfléchi, mais il était doux et sociable. Il jouait de la lyre, prenait intérêt aux affaires publiques, était d'un esprit libéral, et, à ce point de vue, rivalisait avec son père qui s'efforçait de paraître méchant pour ne pas sembler trop bon ». Et dans unautre passage(2), il le désigne comme « un enfant laissant espérer des choses étonnantes ». A la fin de l'entrevue, Cardan le pria d'accepter la dédicace d'un ouvrage auquel il travaillait. Interrogé sur le sujet du livre, Cardan répondit qu'il débutait en faisant connaître l'origine des comètes. La conversation qui s'engagea alors, si elle a

(1) Extrait de la traduction de Morley, vol. II, p. 135 et suivantes.
(2) *De Rerum Varietate*, p. 285.

été rapportée fidèlement, dénotait chez le jeune prince un bon sens rare et une puissance de logique étonnante.

Nous donnons ci dessous une reproduction de l'horoscope d'Edouard dressé par Cardan. Il fut tiré et lu avec un soin exceptionnel. Nous ne mentionnons pas les détails minutieux donnés sur son caractère et sur son existence future, mais il est évident que les prédictions de Cardan furent, en grande partie, des conséquences de l'impression que lui avait laissée l'entrevue dont il est question plus haut. La

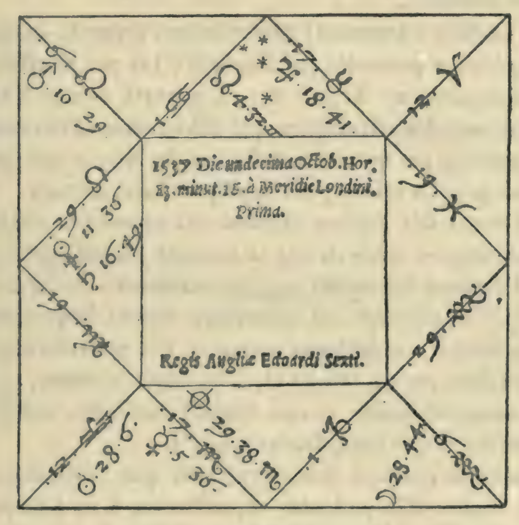


Fig. 75

conclusion relative à la durée de son existence était qu'il devait certainement dépasser la moyenne des âges, bien qu'il fut destiné, après cinquante-cinq ans, trois mois et dix-sept jours, à souffrir de diverses maladies [1].

Au mois de juillet suivant, Edouard mourait, et Cardan comprit qu'il était nécessaire pour sa réputation de donner une explication

[1] *Geniturarum exempla*, p. 19.

de son erreur. Le titre de la dissertation publiée à ce sujet est *Quæ post consideravi de eodem* (1). Son explication consiste, en résumé, à dire que la nativité d'une personne faible ne peut jamais être prédite d'après un simple horoscope ; pour arriver à un résultat certain, il aurait été utile d'établir les horoscopes de naissance de toutes les personnes ayant vécu dans l'intimité d'Edouard ; manquant des informations nécessaires pour effectuer une pareille opération, l'horoscope qu'il avait dressé ne pouvait être regardé que comme une prédiction probable.

C'était rééditer l'argument généralement présenté en cas d'insuccès. L'explication présentée par Raphaël (2) et par Southey (3) est de beaucoup supérieure : d'après eux, il pouvait exister d'autres planètes inconnues des astrologues, qui influencèrent l'horoscope ; mais nous ne pensons pas que les astrologues du Moyen âge invoquèrent jamais une pareille raison pour expliquer leurs erreurs.

Nous n'avons fait aucune allusion aux accessoires variés utilisés par les astrologues, mais ils ont si souvent avancé qu'ils avaient le pouvoir d'évoquer les esprits que nous croyons utile de faire remarquer ici que, selon nous, ces apparitions étaient fréquemment obtenues au moyen d'une lanterne magique. Les portraits étaient quelquefois réfléchis par un miroir et, à un autre moment, projetés sur un épais nuage de fumée, ce qui donnait une image mobile finissant par disparaître d'une façon fantastique (4).

Concluons en répétant encore que bien que l'astrologie ait servi souvent à cacher d'impudentes supercheries, il ne faut pas oublier qu'en Europe et au Moyen âge presque tous les physiciens et les hommes de science étaient des astrologues. Ces observateurs ne considérèrent pas comme définitives les règles admises, et ils réunirent

(1) *Geniturarum exempla*, p. 23.

(2) *The Familiar Astrologer*, Londres, 1832, p. 248.

(3) *The Doctor*, chap. 92.

(4) Voir, par exemple, la vie de Cellini, chap. XIII, traduction de Roscoe, pp. 144-146. Voir aussi l'ouvrage de Sir David Brewster, *Letters on Natural Magic*.

consciencieusement toutes ces observations astronomiques qui démontrèrent l'inanité de leur art. Ainsi donc, si l'astrologie n'a jamais existé sans être un instrument entre les mains des charlatans et des fripons, elle n'en a pas moins contribué au développement intellectuel à une époque où elle était acceptée comme une science difficile mais réelle.

CHAPITRE XII

HYPERESPACE [1]

Nous nous proposons dans les chapitres qui suivent, en nous plaçant à un point de vue purement mathématique, de présenter quelques considérations relatives aux propriétés de l'espace, du temps et de la matière, en donnant un simple aperçu des diverses hypothèses qui ont été faites sur leur nature. Nous ne discuterons pas les théories métaphysiques ayant pour objet d'expliquer l'origine de la conception que nous en avons, car ces théories ne conduisent à aucun résultat pratique et reposent sur des assertions dont la preuve est encore à faire. L'espace, le temps et la matière ne peuvent se définir, mais les moyens de les mesurer et la recherche de leurs propriétés sont du domaine des sciences mathématiques.

Ce premier chapitre est consacré à des considérations ayant trait à

(1) Sur la possibilité de l'existence d'un espace présentant plus de trois dimensions, voir C. H. Hinton *Scientific romances*, Londres 1886, ouvrage des plus intéressants qui nous a été d'un puissant secours et que nous avons mis largement à contribution dans ce chapitre, on peut consulter son dernier ouvrage, *The Fourth Dimension*, Londres 1904. Voir aussi G.F. Rodwell *Nature*, 1er mai 1873, vol. VIII, pp. 8 et 9 ; et E. A. Abbott, *Flatland* (Terre plate). Londres, 1884.

La théorie de la géométrie non Euclidienne est due, en principe, à Lobatschewsky, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellivien*, Berlin, 1840 (exposé à l'origine dans une leçon, en 1826) ; à Gauss (lettres à Schumacher, 17 mai 1831, 12 juillet 1831 et 20 novembre 1846, publiées

l'espace seulement, les questions du temps et de la matière feront l'objet des deux chapitres qui suivent.

Nous nous limiterons dans nos remarques sur les propriétés de l'espace à deux théories qui ont attiré récemment l'attention d'une façon toute spéciale,

Elles sont relatives : 1° à la possibilité de l'existence d'un espace ayant plus de trois dimensions, et 2° à la possibilité de créer une sorte de géométrie (spécialement à deux dimensions) différente de celle traitée dans les ouvrages usuels. Ces deux problèmes sont étroitement liés. L'expression hyper-espace était usitée à l'origine pour désigner un espace à plus de trois dimensions, mais actuellement elle est souvent employée pour spécifier tout espace non euclidien. Nous lui attribuons cette dernière signification, et c'est dans ce sens que la question de l'hyper-espace est traitée dans ce chapitre.

Relativement au premier problème, la conception d'un monde présentant plus de trois dimensions est facilitée par ce fait que notre imagination conçoit sans difficulté un monde limité à deux dimensions. Pour simplifier on peut se le représenter sous la forme d'une surface plane, bien qu'il puisse également être une surface

dans les œuvres de ce savant) ; et à J. Bolyai, dans l'appendice au premier volume de l'ouvrage de son père *Tentamen*, Maros-Vasarkely 1832 ; mais le sujet avait été discuté longtemps avant, en 1733, par J. Saccheri. Les développements de cette théorie ont été donnés principalement par G. F. B. Riemann. *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, ouvrage écrit en 1854, *Göttinger Abhandlungen*, 1866, 67, vol. XIII, pp. 131-152 (traduit par Houel, Paris, A. Hermann) ; H. L. F. von Helmholtz, *Göttingen Nachrichten*, 3 juin 1868, pp. 193-221 ; et E. Beltrami, *Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea* Naples, 1868 et *Annali di Matematica*, série 2, vol. II, pp. 232-255 : voir un article par Von Helmholtz dans *Academy*, 12 février 1870, vol. I, pp. 128-131. La théorie a été de nouveau reprise dans ces vingt-sept dernières années par divers mathématiciens.

Une bibliographie de l'hyperespace, dressée par G. B. Halsted, a été publiée dans le *American Journal of Mathematics*, vol. I (1878), pp. 261-276, 384-385 ; et vol. II (1879) pp. 65-70. Voir aussi Schlegel, la *géom. à n dim.* dans *l'Ens. math.* 1900, p. 77.

sphérique ou une autre surface quelconque. Nous pouvons nous imaginer les habitants d'une terre plate (*Flatland*) comme se déplaçant soit sur la surface, soit entre deux plans parallèles infiniment rapprochés. Ils pourraient se mouvoir d'une façon quelconque sur le plan, mais le mouvement dans une direction perpendiculaire au plan ne leur serait pas permis, et bien plus, ils ne pourraient en avoir l'idée. Il nous est possible de les concevoir sans épaisseur et dans ce cas, ce sont de pures abstractions géométriques, ou de leur supposer une épaisseur uniforme très petite, et alors nous avons des êtres réels.

Quelques auteurs ont cherché en s'amusant, à exposer les conditions de l'existence dans un tel monde. Pour donner un exemple très simple, sur une terre constituée par un plan, ou par un espace plat quelconque présentant une certaine étendue, le groupement des êtres est impossible. Un simple changement même serait pour eux absolument différent de ce qu'il serait pour nous.

Si, par hasard, un habitant d'un tel pays était capable de se déplacer suivant les trois dimensions de notre monde, on lui attribuerait un pouvoir surnaturel, car il pourrait paraître et disparaître à volonté, créer la matière (telle qu'elle serait conçue sur cette terre) ou la détruire, et il jouirait de tant de facultés, dont les autres seraient dépourvus, que ses actions paraîtraient inexplicables.

Nous pouvons encore aller plus loin et imaginer un monde ne présentant qu'une seule dimension semblable à un long tube de diamètre très petit dans lequel les habitants ne pourraient se déplacer qu'en avant ou en arrière. Dans un tel univers on trouverait des lignes de longueurs différentes, mais les figures géométriques n'existeraient pas. La vie sur une terre-ligne paraîtrait bien triste à ceux qui ont la notion de l'espace à plusieurs dimensions. On dit généralement qu'un habitant ne pourrait connaître que deux individus, ses voisins de chaque côté. Ceci serait vrai si le tube considéré ne présentait lui-même qu'une seule dimension, mais on pourrait concevoir une combinaison de tubes suivant deux ou trois dimensions où un habitant n'aurait conscience du mouvement que

dans une seule direction et où cependant ses connaissances seraient plus nombreuses et les conditions de son existence améliorées.

Notre vie consciente se passe dans un monde à trois dimensions et il nous vient naturellement à l'idée de chercher si une quatrième dimension ne pourrait pas exister. Aucun habitant d'un monde plan ne serait à même de concevoir l'existence dans un monde à trois dimensions, cependant s'il établissait une géométrie analytique applicable au monde dans lequel il vit, il lui serait possible de l'étendre de façon à obtenir des résultats exacts dépendant de ce monde à trois dimensions qu'il ne connaît pas et qu'il ne peut concevoir. De même nous n'avons pas le pouvoir de nous former une idée de ce que pourrait bien être la vie dans un monde à quatre dimensions, bien qu'avec l'aide de la géométrie analytique il nous soit possible d'obtenir des résultats s'appliquant à l'espace à quatre dimensions et même à plus de quatre dimensions. Bien plus, par analogie entre notre existence et celle des habitants d'une terre-plane, nous pouvons, jusqu'à un certain point, nous rendre compte de ce que nous paraissons être aux habitants de l'espace à quatre dimensions.

Nous l'avons dit plus haut, on peut concevoir les habitants d'une terre plane comme de pures abstractions géométriques ou comme des êtres d'une épaisseur uniforme très petite suivant la troisième dimension. Semblablement, s'il y a une quatrième dimension dans l'Univers, nous pouvons être considérés soit comme ne comptant pas suivant cette dimension, auquel cas nous sommes de simples abstractions (géométriques) — ainsi d'ailleurs que le prétendent certains philosophes idéalistes — soit comme possédant une épaisseur uniforme, mais très petite, suivant la quatrième dimension, et dans ce cas nous vivons sans en avoir conscience dans un espace à quatre dimensions. Dans ce dernier cas, il est permis de supposer que dans notre monde, l'épaisseur des corps suivant la quatrième dimension est très petite et constante ; on a aussi admis qu'elle est comparable avec les autres dimensions des molécules matérielles, et il est possible alors que la constitution de la matière et ses propriétés

fondamentales suppléeront aux données expérimentales et nous fourniront des bases physiques sur lesquelles il sera possible d'asseoir un raisonnement démontrant l'existence ou la non existence de cette quatrième dimension.

Si nous pouvions jeter les yeux sur les habitants d'une terre-plane, nous nous rendrions facilement compte de leur anatomie et tout ce qui se passe en eux nous serait connu ; de même un habitant de l'espace à quatre dimensions pourrait voir dans notre corps.

Un habitant de l'espace à deux dimensions ne pourrait sortir d'un appartement ayant, par exemple, la forme d'un rectangle, que par une ouverture dans le périmètre ; mais en lui donnant, pour un instant, la possibilité de se déplacer suivant les trois dimensions de notre monde, on le verrait apparaître de l'autre côté d'une enceinte quelconque où il aurait été enfermé. De même si nous trouvions des êtres animés pouvant sortir d'une cellule close où ils sont emprisonnés sans passer par une des ouvertures existantes, nous aurions des raisons de penser que cette sortie s'est effectuée par un déplacement suivant la quatrième dimension, puis que les êtres en question sont revenus dans notre espace suivant cette même dimension. Un pareil phénomène nous est inconnu.

Si un corps solide passait lentement à travers l'espace à deux dimensions, les habitants n'auraient conscience de l'existence du corps que pour la partie située dans leur espace ; ils verraient des objets se modifier graduellement, quant à leur forme, pour finir par disparaître. Semblablement si un corps déterminé à quatre dimensions traversait notre espace, nous n'aurions conscience de son existence que comme un solide à trois dimensions (c'est-à-dire que de la section du corps par notre espace) dont la forme et l'aspect changeraient progressivement jusqu'au moment où il finirait par disparaître complètement. On a émis cette idée que la naissance, le développement, la vie et la mort des êtres animés pouvaient s'expliquer ainsi par le passage à travers notre espace de corps déterminés présentant quatre dimensions. Nous croyons nous souvenir que cette idée appartient à M. Hinton.

Le même raisonnement s'applique à tous les corps matériels. L'impénétrabilité et l'inertie de la matière sont des conséquences nécessaires de son existence, il en résulte la conservation de l'énergie en supposant la vitesse, avec laquelle le corps se déplace suivant la quatrième dimension, choisie conventionnellement ; mais la conservation de la matière dépend de cette supposition que les corps ne traversent pas complètement notre espace. Nous négligeons les détails relatifs au changement de densité suivant les variations de la section du corps par notre espace.

Il ne nous est pas possible de démontrer que l'espace à quatre dimensions existe réellement, mais il peut être intéressant d'étudier les probabilités de l'existence d'un pareil espace. Dans ce but examinons tous les arguments qu'un habitant d'une terre à deux dimensions pourrait invoquer pour justifier l'existence d'un monde à trois dimensions, et voyons ensuite si des raisons analogues pourraient être acceptées et mises en avant par un habitant de notre monde. Commençons par des considérations basées sur la géométrie, nous aborderons ensuite celles fondées sur la physique.

Les habitants d'un monde à deux dimensions pourraient reconnaître qu'il est possible d'avoir deux triangles dont tous les éléments sont égaux deux à deux, mais qui ne coïncident pas par superposition. Nous connaissons l'explication du fait : pour obtenir la superposition des deux figures, l'une d'elles doit être retournée au préalable de façon à amener la face inférieure à être la face supérieure ; un pareil mouvement est bien entendu irréalisable et ne se conçoit pas dans l'espace à deux dimensions. Il est cependant possible qu'ils aient l'idée d'un pareil déplacement en remarquant que les habitants de l'espace à une seule dimension éprouvent une difficulté de même nature quand ils se proposent de vérifier l'égalité de deux lignes, ABC et CB'A', définies chacune par une suite de trois points, En supposant ces deux lignes égales, les points correspondants de chacune d'elles pourraient être superposés en exécutant une rotation autour du point C — mouvement irréalisable et ne concevant pas dans le monde à une dimension — mais l'habitant

d'un tel espace en se déplaçant de A en A′ ne rencontrerait pas les points correspondants sur les deux lignes dans le même ordre relatif, et par suite pourrait douter de leur égalité. Dès lors, les habitants de l'espace à deux dimensions, pourraient conclure, par analogie, qu'en faisant tourner l'un des triangles dans l'espace à trois dimensions, les deux figures seraient rendues superposables.

Nous rencontrons des difficultés à peu près du même genre dans notre géométrie. Nous trouvons des triangles — tels que deux triangles sphériques — dont tous les éléments sont égaux deux à deux. et qui cependant ne sont pas superposables. Nous pouvons également tracer deux spirales dont tous les éléments sont respectivement égaux, mais dans l'une l'enroulement se fait à droite, et dans l'autre, à gauche ; dans ces conditions il est impossible de leur faire occuper successivement le même emplacement dans l'espace. On pourrait encore concevoir deux corps égaux, comme la main droite et la main gauche, qui sont exactement semblables, mais si l'on suppose matérialisé l'emplacement vide de l'une dans l'espace, l'autre ne peut remplir ce vide. Ce sont là des exemples de difficultés analogues à celles éprouvées par les habitants d'une terre à deux dimensions en comparant des triangles symétriques. On peut admettre que de même que les difficultés de cette nature, dans la géométrie des habitants de l'espace à une dimension, s'expliquent par un déplacement momentané de la figure dans l'espace à deux dimensions, c'est-à-dire en lui faisant faire une rotation autour d'un point, et de même que les difficultés du même genre dans l'espace à deux dimensions sont résolues par un déplacement momentané de la figure dans l'espace à trois dimensions, c'est-à-dire en la faisant tourner autour d'une ligne comme axe ; de même enfin, les difficultés que nous rencontrons dans notre géométrie disparaîtraient si nous pouvions déplacer nos figures dans l'espace à quatre dimensions en les faisant tourner autour d'un plan — mouvement qui, bien entendu, échappe à notre conception.

Nous devons maintenant examiner si l'hypothèse de l'existence de l'espace à quatre dimensions donne l'explication de quelques diffi-

cultés ou de quelques contradictions apparentes constatées dans l'étude des sciences physiques ([1]). Or, l'idée généralement admise d'un éther lumineux, l'explication de la gravitation et le fait que la matière se présente seulement sous un nombre déterminé d'espèces, les atomes de chaque espèce étant semblables, sont autant de difficultés ou de contradictions. Pour voir si l'hypothèse d'un espace à quatre dimensions nous permet d'élucider la question, nous ferons mieux d'étudier d'abord les problèmes analogues dans l'espace à deux dimensions.

Nous vivons sur un corps solide à peu près sphérique qui se meut autour du soleil soumis à l'influence d'une force attractive dirigée vers son centre. Pour réaliser quelque chose de semblable dans l'espace à deux dimensions, il nous faut supposer ses habitants sur la périphérie d'un disque planétaire tournant autour d'un autre disque (le disque solaire) et sous l'influence d'une attraction vers ce dernier. Nous pouvons admettre que le monde planétaire ainsi compris repose sur un plan uni ou sur une autre surface à courbure constante ; mais la pression exercée sur ce plan et même son existence sont ignorées des habitants bien qu'ils aient conscience de la force attractive émanant du centre du disque sur lequel ils vivent. Bien entendu, ils ont connaissance des corps solides, liquides ou gazeux pouvant exister sur la périphérie ou en des points qu'ils peuvent atteindre à l'intérieur de leur terre.

Chaque partie de matière dans le monde qui nous occupe se trouve sur ce milieu plan. Dès lors, si une particule quelconque de matière était animée d'un mouvement vibratoire, elle communiquerait une partie de son mouvement au plan qui la supporte. Les vibrations transmises ainsi au plan se propageraient dans toutes les directions et toutes les autres particules de matière participeraient au mouve-

([1]) Voir une note que nous avons publiée dans le *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1891, vol. XXI, pp. 20-24, dont le raisonnement ci-dessus est un extrait.

La question a été également traitée sous une forme semblable par M. Hinton.

ment vibratoire qui deviendrait général. Par conséquent, l'énergie causée par des vibrations et se manifestant sous une forme quelconque (telle que la lumière, la chaleur rayonnante, l'électricité, et peut-être l'attraction) se transmettrait d'un point à un autre sans que la présence d'un milieu quelconque servant d'intermédiaire puisse être soupçonnée.

Si les particules étaient supportées par un plan assimilable à une membrane d'une élasticité uniforme, l'intensité des agitations en un point quelconque serait inversement proportionnelle à la distance qui le sépare de la source des agitations ; si les particules s'appuyaient sur un milieu solide d'une élasticité uniforme, l'intensité serait inversement proportionnelle au carré de la même distance, mais si le milieu qui sert de support était animé d'un mouvement vibratoire, partout où il est en contact avec une particule il lui céderait une partie de son énergie et, par suite, les vibrations du milieu intermédiaire seraient arrêtées par son association avec la matière.

Si les habitants de notre monde à deux dimensions étaient à même de raisonner sur la manière dont l'énergie se transmet, ils arriveraient à une difficulté. Il est probable qu'ils ne pourraient expliquer la gravitation entre deux particules — et par suite entre le disque solaire et le disque qu'ils habitent — qu'en supposant en vibration un milieu résistant reliant les deux particules ou les disques. Ils pourraient même découvrir que la lumière et la chaleur rayonnantes, telles que la lumière et la chaleur solaires, sont transmises par des vibrations transversales à la direction d'où elles viennent (bien qu'il ne leur serait possible de réaliser des vibrations de cette nature que dans leur plan), et démontrer expérimentalement que la transmission de ces vibrations exige la présence d'un milieu très résistant (que nous pouvons désigner sous le nom d'éther). Dans les deux cas cependant il serait absolument évident pour eux qu'aucun milieu résistant ne les entoure ou ne relie leur terre au disque solaire. L'explication de ces résultats contradictoires repose sur ce fait que leur univers est soutenu par un plan, dont nécessairement

ils n'ont pas conscience et que ce plan rigide et élastisque constitue l'éther qui transmet les vibrations.

Supposons maintenant que les corps de notre univers présentent tous, suivant la quatrième dimension, une épaisseur uniforme, et qu'ils s'appuient, suivant cette dimension, sur un corps homogène, doué d'élasticité, et dont l'épaisseur toujours suivant la quatrième dimension, soit très faible et constante. La transmission de la force et de l'énergie radiante pourra s'expliquer, sans l'intervention d'un milieu séparatif, au moyen des vibrations du corps qui sert d'appui, lors même que ces vibrations ne s'effectueraient pas suivant la quatrième dimension. On trouverait également (ce que d'ailleurs l'expérience confirme) que l'intervention de la matière arrête les vibrations de l'éther lumineux. Nous avons supposé que l'espace servant de support présentait, suivant la quatrième dimension, une épaisseur très petite et uniforme, parce qu'alors l'intensité de l'énergie transmise par une source à un point quelconque est inversement proportionnelle au carré de la distance (fait vérifié par l'expérience), tandis que la loi ne serait plus la même si l'espace-support était un corps à quatre dimensions, l'intensité, dans ce cas, serait inversement proportionnelle au cube de la distance.

L'application de cette hypothèse à la troisième difficulté mentionnée ci-dessus, c'est-à-dire l'explication de ce fait que notre univers ne renferme qu'un nombre fini d'espèces d'atomes, tous les atomes de chaque espèce ayant en commun un certain nombre de propriétés caractéristiques, a été donnée par divers savants[1].

Ainsi, la supposition de l'existence d'un corps homogène doué d'élasticité et présentant quatre dimensions, sur lequel s'appuierait notre univers à trois dimensions, nous permettrait d'expliquer quelques-unes des difficultés que l'on rencontre dans les sciences physiques.

Il va sans dire qu'il n'est pas possible de réaliser une figure à quatre dimensions ; quoiqu'il en soit, on a fait des tentatives pour

(1) Voir : Poincaré : Science et hypothèse.

chercher à se rendre compte de ce que pourraient bien être les sections d'une telle figure.

Si l'équation de la surface d'un solide à trois dimensions est $\varphi(x, y, z) = o$, nous pouvons nous former une idée de ce corps en superposant par la pensée une série de sections faites par des plans parallèles à l'axe des z. Dans la géométrie à quatre dimensions, l'équation de la surface d'un corps serait $\varphi(x, y, z, w) = o$, et on a fait des essais pour réaliser la forme d'un solide de cette nature en construisant les modèles d'une suite de corps à trois dimensions obtenus au moyen de sections parallèles à $w = o$.

Nous pouvons également représenter un solide en perspective au moyen de sections par trois plans coordonnés. Dans le cas d'un corps à quatre dimensions, la section par chacun des quatre solides coordonnés à trois dimensions, serait un corps à trois dimensions, et on a cherché à construire ces sections pour avoir une idée de la forme d'un solide à quatre dimensions. Bien entendu, l'enveloppe d'un solide à quatre dimensions est constituée par des corps.

M. Stringham (1) a discuté les formes possibles des corps réguliers dans l'espace à quatre dimensions analogues aux polyèdres de l'espace à trois dimensions.

Abordons actuellement la seconde question énoncée, page 85 savoir : la possibilité de créer une géométrie autre que celle généralement acceptée jusqu'ici et traitée dans tous les ouvrages classiques. Ce sujet est trop technique pour être étudié à fond dans un livre de cette nature, et nous devons nous contenter d'en donner une idée sommaire.

Le système euclidien de géométrie, le seul que connaisse la plupart des gens, repose sur un certain nombre d'axiomes et de postulats indépendants les uns des autres. Ceux qui sont nécessaires pour les fondements de cette géométrie ont été, durant ces dernières années, discutés et énumérés. Ils comprennent non seulement ceux explicitement énoncés par Euclide, mais encore plusieurs autres qu'il

(1) *American Journal of Mathematics*, 1880, vol. III, pp. 1-14.

admettait inconsciemment. Si ces axiomes sont modifiés ou abandonnés pour en formuler d'autres, on obtient comme conséquence, une série de propostions qui diffèrent des premières, et une telle suite de propositions réunies en corps de doctrine, constitue un système de géométrie. On comprend dès lors qu'il soit possible de construire une infinité de géométries non euclidiennes.

Parmi les axiomes et postulats admis par Euclide il en est un qui se présente généralement sous cette forme : Si dans un même plan, deux droites sont coupées par une troisième de façon à former d'un même côté de cette 3me droite, deux angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, ces deux droites suffisamment prolongées finiront par se rencontrer précisément du côté de la 3me droite où sont situés les deux angles considérés. Sous cette forme l'axiome est loin d'être évident, et, depuis les temps les plus reculés, il a été fait de nombreux essais dans le but d'en trouver une démonstration (1).

Tous ces essais sont restés infructueux et ne pouvaient d'ailleurs réussir car l'on sait aujourd'hui, que l'axiome en question ne peut se déduire des autres admis par Euclide. On peut, il est vrai le remplacer par d'autres spécifiant quelques propriétés caractéristiques des droites parallèles : dire, par exemple, que deux telles droites sont équidistantes en tous leurs points ; mais cette exposition, bien qu'elle puisse paraître *prima facie* plus évidente, ne doit pas prendre le pas sur l'axiome d'Euclide qui présente cet avantage de faire ressortir d'une manière remarquable la physionomie toute caractéristique de l'espace auquel il s'applique.

La plus ancienne conception d'une géométrie non euclidienne est due à la découverte, faite indépendamment par Saccheri, Lobatschewsky, et Jean Bolyai, de ce fait qu'un système consistant de géométrie à deux dimensions pouvait être créé en partant de cette sup-

(1) Quelques uns de ces essais, parmi les plus intéressants et les plus présentables, ont été réunis dans l'ouvrage de J. Richard : *Philosophie des mathématiques*, Paris, 1903.

position que l'axiome des parallèles était inexacte, c'est-à-dire qu'il est possible de mener par un point plusieurs droites (lignes géodésiques) parallèles à une ligne droite donnée. Cette géométrie a été appelée *hyperbolique*.

Plus tard Riemann établit la distinction entre l'espace illimité et l'espace infini et montra qu'un autre système logique de géométrie à deux dimensions pouvait être construit dans lequel toutes les lignes droites ont une longueur finie, de telle sorte qu'un point qui se déplace le long d'une ligne droite revient à sa position initiale. On est ainsi conduit à une géométrie à deux dimensions appelée *géométrie elliptique*, analogue à la géométrie *hyperbolique*, mais caractérisée par ce fait que, par un point, il n'est pas possible de mener une droite qui étant suffisamment prolongée ne rencontre pas une autre droite donnée quelconque. On peut comparer cette géométrie à celle des figures tracées sur une sphère.

Ainsi, suivant qu'on ne peut mener par un point aucune droite parallèle à une droite donnée, ou qu'on n'en peut mener qu'une seule, ou encore plusieurs formant faisceau, nous avons trois systèmes de géométrie à deux dimensions appelées respectivement elliptique, parabolique ou euclidienne, et hyperbolique.

Dans les systèmes parabolique et hyperbolique, les lignes droites sont infiniment longues ; dans le système elliptique elles sont finies comme longueur. Dans le système hyperbolique il ne peut exister de figures semblables de dimensions inégales ; l'aire d'un triangle peut se déduire de la somme de ses angles qui est toujours plus petite que deux angles droits, et cette aire a une valeur finie maximum. Dans le système elliptique, toutes les lignes droites ont la même longueur finie ; deux droites quelconques se coupent toujours, et la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux droits. Dans ce système il est possible de se rendre d'un point à un autre situé de l'autre côté du plan sans traverser le plan, en gagnant l'autre côté en suivant la droite qui joint les deux points. Ainsi une montre dont le cadran est apparent et qui se déplace sur un plan, toujours en avant et suivant la direction donnée par les marques

VI et XII, apparaîtra finalement à un observateur avec le cadran en dessous ; et si à l'origine, la marque III était à la droite de l'observateur, elle sera à sa gauche à la fin du mouvement.

Malgré ces particularités et bien d'autres sur lesquelles nous n'insistons pas et qui caractérisent les géométries hyperbolique et elliptique, il est impossible de démontrer, au moyen d'observations, que l'une ou l'autre de ces géométries ne s'applique pas à l'espace dans lequel nous vivons. Car il nous faut, dans l'une comme dans l'autre, une unité de distance pour effectuer les mesures, et si nous nous trouvons dans un espace dont les propriétés sont celles de l'une ou de l'autre de ces géométries, et tel que les plus grandes distances avec lesquelles nous sommes familiarisés (par exemple les distances des étoiles fixes) sont immensément plus petites qu'une unité quelconque, naturelle au système en question, alors il peut être impossible de déduire de nos observations les contradictions pouvant exister entre les trois géométries. A la vérité, il pourrait être possible de prouver par les observations des parallaxes des étoiles, que le système parobolique et l'un ou l'autre des systèmes hyperbolique ou elliptique sont faux, mais on ne pourra jamais démontrer, par des mesurages, que la géométrie euclidienne est vraie. Des difficultés de même ordre se présentent quand on considère des quantités d'une petitesse extrême.

En résumé, bien que l'exactitude des résultats fournis par la géométrie euclidienne, soit confirmée par les expériences actuellement faites sur les objets finis tels que ceux qui nous entourent, cependant ils peuvent ne pas être exacts si l'on considère des objets présentant des dimensions beaucoup plus grandes ou beaucoup plus petites ou encore une partie de l'espace restée jusqu'à présent inaccessible.

Si cependant allant plus loin on veut se demander ce qu'il faut entendre quand on dit qu'une géométrie est vraie ou qu'elle est fausse, nous citerons cette remarque de Poincaré que le choix d'une géométrie est, en réalité, une affaire de convenance et que la meilleure géométrie est celle qui nous permet de constater les lois phy-

siques de la façon la plus simple. Cette opinion a été fortement controversée, mais elle n'en donne pas moins une vue de la question.

Tout ce qui précède s'applique seulement à l'hyper-espace à deux dimensions. Naturellement, la question a été poussée plus loin et on s'est occupé de chercher s'il n'y aurait pas plusieurs sortes d'hyper-espaces à trois ou plus de trois dimensions. Riemann a montré qu'il existait trois sortes d'hyper-espaces à trois dimensions ayant des propriétés analogues à celles des trois sortes d'hyper-espaces à deux dimensions déjà étudiées. Ces espaces se distinguent les uns des autres par ce fait que, par un point donné, on peut faire passer une surface géodésique ou un faisceau de surfaces géodésiques parallèles à une surface donnée, ou qu'on n'en peut faire mener aucune : une surface géodésique étant telle que toute ligne géodésique joignant deux de ses points est toute entière sur la surface.

Il est évident que les propriétés de l'espace non euclidien à trois dimensions ne peuvent se déterminer qu'au moyen de l'analyse mathématique et ne peuvent être matérialisées, car pour réaliser et construire des surfaces dans l'espace non euclidien à deux dimensions, il est nécessaire d'employer des modèles de l'espace à trois dimensions ; semblablement nous ne pourrions construire des modèles de l'espace non-euclidien à trois dimensions qu'en faisant intervenir l'espace à quatre dimensions.

Il est encore possible d'aller plus loin et de concevoir une géométrie non-euclidienne à plus de trois dimensions, mais c'est là une conception qui, jusqu'à présent, n'a pas donné lieu à des recherches.

En revenant maintenant à la géométrie non-euclidienne, nous insisterons encore sur ce point que si on substitue d'autres axiomes à ceux énoncés par Euclide, il est possible de construire autant de systèmes consistants de géométrie. Quelques-uns sont intéressants, mais ceux qui ont été mentionnés plus haut présentent une importance particulière, résultant de ce fait, quelque peu sensationnel,

qu'aussi loin qu'il a été possible de les développer, ils ne conduisent à aucun résultat nécessairement inconsistant avec les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons ; nous ne connaissons, jusqu'à présent, aucun autre système possèdant le même caractère distinctif.

CHAPITRE XIII

DU TEMPS ET DE SA MESURE

Les problèmes qui dépendent du temps présentent un caractère absolument différent de ceux concernant l'espace que nous avons examinés dans le dernier chapitre. Nous avons montré que la vie, telle qu'il nous est possible de l'imaginer, dans l'espace à une dimension, ne présenterait pas beaucoup d'intérêt, et que probablement, les habitants d'un pareil espace ne seraient pas en état de concevoir l'existence dans un monde supérieur. Nous nous trouvons dans une situation à peu près identique quand nous abordons les questions relatives au temps. Nous concevons par la pensée, le passé et le futur — ce qui peut être considéré comme correspondant à un déplacement en arrière et en avant — mais en réalité nous ne faisons qu'aller en avant. A ce point de vue, le temps est comparable à un espace à une dimension. Si notre temps était à deux dimensions, les conditions de notre existence seraient infiniment plus variées, mais il ne nous est pas possible de concevoir le sens d'une pareille expression, et nous ne pensons pas qu'on ait jamais tenté de l'expliquer.

Nous nous bornerons simplement ici à l'étude des questions relatives à la mesure du temps, et nous les traiterons plutôt au point de vue historique qu'au point de vue philosophique.

Pour mesurer une quantité quelconque, nous devons être en possession d'une unité invariable de la même espèce et pouvoir déterminer combien de fois cette unité est contenue dans la quantité

que l'on se propose de mesurer. Par suite, les seules quantités susceptibles d'être mesurées sont celles qui peuvent s'ajouter à d'autres de la même espèce.

Ainsi pour évaluer une longueur, nous pouvons prendre le mètre et en le portant sur cette longueur autant de fois qu'il est nécessaire pour la couvrir entièrement, nous trouverons combien elles contient de mètres et de subdivisions du mètre. Mais pour la comparaison des longueurs entre elles, nous devons admettre comme résultat de l'expérience, que la longueur du mètre est constante ou plutôt, que toute variation de l'unité est susceptible d'une détermination exacte ; si cette proposition n'était pas admise, nous ne pourrions en donner une démonstration, bien que fort probablement, nous n'aurions aucune raison de douter de l'exactitude de notre façon d'opérer, si des expériences nombreuses faites dans des conditions variées, nous fournissaient toujours le même résultat.

Il est évident que la mesure du temps est un problème autrement difficile. Nous ne pouvons avoir, par devers nous, une unité de temps, comme nous avons un mètre étalon ; ni mesurer un intervalle de temps par la répétition d'un certain nombre d'opérations identiques, car le temps une fois passé l'est pour toujours. Nous ne pouvons donc faire un appel direct à nos sensations pour justifier notre façon d'opérer. Par conséquent, quand nous disons qu'une certaine durée est mesurée par quatre heures ce n'est qu'en faisant appel à la raison que nous pouvons montrer que chacune de ces heures représente la même durée.

La détermination d'une unité scientifique pour mesurer le temps a été un travail long et pénible. Voici, semble-t-il, la marche suivie : les hommes observèrent à l'origine que certains phénomènes se reproduisaient dans l'intervalle d'un jour, d'un lever à l'autre du soleil. L'expérience — par exemple la quantité de travail qu'ils pouvaient effectuer dans cet intervalle de temps — leur montra que la longueur de chaque jour était à peu près la même, et en supposant cette longueur constante ils se trouvèrent en possession d'une unité au moyen de laquelle ils purent comparer les durées des évé-

nements. La subdivision du jour en heures, minutes et secondes est artificielle et semblerait remonter aux Babyloniens.

Semblablement, le mois et l'année sont des unités naturelles de temps, bien qu'il ne soit pas très facile d'en déterminer exactement le commencement et la fin.

Les choses restèrent ainsi tant que les hommes n'eurent simplement à s'occuper que de durées multiples des unités usitées ou dont la mesure n'exigeait pas une très grande précision mais ils se trouvèrent arrêtés aussitôt qu'ils cherchèrent à comparer les différentes unités ou à se rendre compte d'une durée exprimée par une partie de l'unité. En particulier, ils ne tardèrent pas à s'apercevoir que la durée du jour différait suivant les lieux, et que, même en un même lieu, cette durée variait à divers moments de l'année. Dès lors, le jour ainsi compris ne pouvait être considéré comme une unité invariable.

La question se pose alors ainsi : pouvons-nous trouver une unité fixe servant à mesurer la durée et avons-nous la certitude que les minutes et les secondes employées aujourd'hui à cet usage aient une durée égale ? Pour répondre, rendons-nous compte de la façon dont un mathématicien définirait l'unité de temps. Il dirait probablement, que l'expérience montre qu'un corps rigide se déplaçant suivant une ligne droite sans l'intervention d'aucune force extérieure, continue son mouvement indéfiniment suivant cette même droite, et on peut regarder comme égaux les temps mis par ce corps pour parcourir des espaces égaux ; semblablement, si ce corps était animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe principal passant par son centre de masse, les temps mis pour décrire des angles égaux seraient égaux. Toutes nos expériences sont en concordance à ce sujet et un mathématicien ne peut demander une autorité supérieure.

Les espaces et les angles pouvant être mesurés, les durées d'événements divers sont comparables. Or, la terre est très approximativement semblable à un corps rigide tournant autour d'un axe principal passant par son centre sans l'intervention d'aucune force exté-

rieure ; par suite le temps mis par la masse terrestre pour effectuer une rotation de quatre angles droits, c'est-à-dire de 360° est toujours le même, on l'appelle le *jour sidéral.* Le temps nécessaire pour tourner de la vingt-quatrième partie de 360°, c'est-à-dire de 15°, est appelé *heure*, et le temps mis pour tourner de la soixantième partie de 15° c'est-à-dire de 15′ est une *minute* ; et ainsi de suite.

Si nous trouvons, par suite de perfectionnements apportés dans les observations astronomiques, que le mouvement de rotation de la terre est influencé par l'action de forces extérieures, les mathématiques nous permettront de déterminer le temps de la rotation en supposant annihilé l'effet de ces forces extérieures, et nous déterminerons ainsi la correction à faire subir à l'unité choisie. On peut dire de la même manière que si la longueur du mètre étalon est légèrement modifiée par une variation de température, la variation de longueur pouvant se calculer il est facile de corriger en conséquence l'unité de longueur employée. En fait, on a des raisons de croire que la terre met environ $\frac{1}{66}$ de seconde de plus qu'il y a deux milles cinq cents ans pour tourner de quatre angles droits autour de son axe, par suite la durée de la seconde est aujourd'hui un tant soit peu plus longue que lors de la fondation de la cité romaine.

Le jour sidéral dont la détermination exige des observations astronomiques très minutieuses et très exactes ne constitue pas une unité convenable pour l'usage ordinaire. Les relations de la vie civile dépendent principalement de la position du soleil qui est notre régulateur naturel. Le jour solaire vrai est le temps mis par la terre pour effectuer, par rapport au soleil, une rotation complète autour de son axe ; il est midi vrai lorsque le soleil passe au méridien du lieu d'observation. Par suite du mouvement du soleil par rapport à la terre, la durée du jour solaire vrai surpasse d'environ quatre minutes celle d'un jour sidéral.

Le jour solaire vrai n'a pas cependant toujours la même durée. C'est un inconvénient si (comme c'est actuellement l'usage dans l'Europe occidentale depuis bientôt deux cents ans) le temps est

évalué d'après les indications d'une horloge et non au moyen d'un cadran solaire, et on prend pour la mesure du jour la durée moyenne du jour solaire vrai : c'est ce qu'on appelle le jour solaire moyen. Pour définir l'instant *midi* d'un jour solaire moyen, on suppose un point se déplaçant uniformément sur l'écliptique coïncidant avec le soleil à chaque apside, et un soleil fictif, appelé soleil moyen, se déplaçant sur l'équateur céleste de telle sorte que sa distance au premier point du Bélier soit la même que celle de ce point : il est midi moyen lorsque ce soleil moyen est sur le méridien. Le jour solaire moyen est divisé en heures, minutes et secondes qui sont les unités usuelles de temps dans la vie civile.

Le temps indiqué par nos horloges et nos montres est le temps solaire moyen, le temps évalué d'après les indications des cadrans solaires ordinaires est le temps solaire vrai. La différence entre les deux constitue ce qu'on nomme l'équation du temps : à certaines époques de l'année, cette différence peut être d'un peu plus d'un quart d'heure. En Angleterre, l'origine des longitudes est le méridien de Greenwich et au lieu du temps solaire moyen local, on prend comme étalon de mesure le temps solaire moyen correspondant au méridien de Greenwich.

Le temps moyen est d'invention relativement récente. La France est le pays civilisé qui a abandonné le dernier, en 1816, l'usage du temps vrai.

Il n'y avait pas autrefois accord complet sur l'origine du jour.

Dans certaines parties de l'ancienne Grèce et au Japon, l'intertervalle entre le lever et le coucher du soleil était divisé en douze heures, ainsi que l'intervalle entre le coucher et le nouveau lever. Les Juifs, les Chinois, les Athéniens et, récemment encore, les Italiens, subdivisaient le jour en vingt-quatre heures à partir du coucher du soleil, qui varie, bien entendu, chaque jour. On prétend que cette façon de compter le temps est encore usitée dans quelques villages des environs de Naples avec cette modification que le jour commence une demi-heure après le coucher du soleil. De même les Babyloniens, les Assyriens, les Persans et, jusqu'à ces temps

derniers, les Grecs modernes et les habitants des îles Baléares comptaient les vingt quatre heures du jour à partir du lever du soleil. Les anciens Égyptiens et Ptolémée faisaient partir les vingt-quatre heures de la journée de midi : c'est encore l'habitude des astronomes modernes. Dans toute l'Europe occidentale, le jour commence à minuit — comme Hipparque en a le premier donné l'idée — et est divisé en deux périodes égales de chacune douze heures.

Aussi loin que nos observations remontent, on trouve que la semaine de sept jours était d'un usage universel en Orient, mais c'est une unité de temps artificielle. L'empereur Théodose l'introduisit en Occident et depuis lors elle a été adoptée d'une façon générale (sauf, cependant, durant la première révolution française) par toutes les nations civilisées. Les noms des jours sont tirés de ceux des sept planètes astrologiques qui sont (en les disposant, suivant l'usage, dans l'ordre de leur temps apparent de rotation autour de la terre) Saturne, Jupiter, Mars, le Soleil, Vénus, Mercure et la Lune. Les vingt-quatre heures du jour étaient successivement dédiées à ces planètes, et le jour était consacré à la planète qui correspondait à la première heure.

Par exemple, si la première heure était dédiée à Saturne, la seconde l'était à Jupiter, la troisième à Mars, et ainsi de suite, mais le jour était le jour de Saturne. La vingt quatrième heure du jour de Saturne étant dédiée à Mars, la première heure du jour suivant appartenait au Soleil, et ce jour était le jour du Soleil. Semblablement, le jour suivant était le jour de la Lune, puis on avait le jour de Mars, le jour de Mercure, le jour de Jupiter et le jour de Vénus.

Le mois astronomique est une unité de temps naturelle dépendant du mouvement de la Lune et contenant environ vingt-neuf jours et demi. Les mois du calendrier ont été réglés graduellement comme divisions convenables du temps et on en trouve l'histoire dans presque toutes les astronomies. Dans la disposition primitive de Julien, les mois des années bissextiles étaient alternativement de trente-et-un et de trente jours, tandis que dans les autres années,

février ne comptait que vingt-neuf jours. Auguste modifia cette disposition pour que son mois ne fut pas d'une durée moindre que celui portant le nom de son oncle.

L'année tropique solaire est une autre unité naturelle de temps : d'après des observations récentes, elle contient 365,242216 jours, c'est-à-dire 365 jours, 5 heures, 48 minutes, 47,4624 secondes. Les Égyptiens n'ignoraient pas que cette année contenait entre 365 et 366 jours, mais les Romains n'utilisèrent pas cette observation car Numa regardait, dit-on, l'année comme constituée par 365 jours. Des mois additionnels étaient intercalés d'une façon accidentelle afin de faire tomber les saisons à peu près aux mêmes époques.

En l'an 46 A. C., Jules César décréta que l'année contiendrait à l'avenir 365 jours et que, tous les quatre ans, c'est-à-dire chaque année bissextile, on ajouterait un jour supplémentaire. Cette règle devait être applicable à partir du premier janvier de l'année 45 A. C. Ce changement fut fait d'après les conseils de Sosigène, célèbre astronome et mathématicien d'Alexandrie.

Il faut se rappeler que l'année 1, *Anno Domini*, suit immédiatement l'année 1, A. C., c'est-à-dire qu'il n'y a pas eu d'année 0, et qu'ainsi l'année 45 A. C. aurait dû être une année bissextile. Toutes les dates historiques sont données maintenant comme si le calendrier Julien s'appliquait aux années antérieures aussi bien qu'aux années postérieures à l'an 45 [1]. En réalité et par suite d'une erreur commise dans le décret originel, les Romains, pendant les trente-six premières années qui suivirent l'an 45 A. C, intercalèrent le jour supplémentaire chaque troisième année, mais l'erreur fut corrigée par Auguste.

Le calendrier Julien faisait l'année de 365,25 jours. La valeur actuelle est très approximativement de 365,242216 jours. Dès lors, l'année Julienne est trop longue d'environ onze minutes et quart, ce qui produit une erreur de près d'un jour au bout de cent vingt-huit ans. Si le jour supplémentaire à intercaler avait été omis

(1) Herschel — *Astronomie*, Londres, 11e édit. 1871, art. 916-919.

chaque trente-deuxième année bissextile — comme l'avait proposé un astronome persan dont le nom ne nous est pas resté — l'erreur n'aurait pas été d'un jour au bout de 100,000 ans. Ajoutons que Sosigène n'ignorait pas que sa règle conduisait à une année un peu trop longue.

L'erreur dans le calendrier Julien, un peu supérieure à onze minutes par an, s'accumula graduellement, et au XVIe siècle, les équinoxes du printemps et de l'automne devancèrent de près de dix jours les époques du 21 mars et du 21 septembre avec lesquelles ils concordaient primitivement. En 1582, Grégoire XIII corrigea l'erreur en supprimant dix jours dans cette année (qui, dès lors, fut comptée comme ayant seulement 355 jours) et en ordonnant, par une bulle du 24 février 1582, qu'à l'avenir chaque année ayant pour millésime un multiple de 100 serait bissextile ou non suivant que ce multiple est ou n'est pas divisible par 4.

L'idée fondamentale de cette réforme appartient à Lilius qui mourut avant sa mise en pratique. Clavius fut chargé d'établir le nouveau calendrier et il en a exposé les principes et les règles dans un ouvrage prolixe mais bien travaillé de 500 pages (1). Le plan adopté fut suggéré par Pitatus en 1552, ou peut-être en 1537 ; la proposition mieux étudiée, faite en 1 518 par Stöffler, de retrancher un jour tous les 134 ans ayant été rejetée par Lilius et Clavius pour des raisons qui ne nous sont pas connues.

Clavius pensait que l'année contenait 365,2425432 jours, mais il établissait son calendrier en partant de la moyenne 365,2425 jours, et il calculait que l'erreur devait être de un jour au bout de 3 323 ans ; en réalité, l'approximation est un peu plus grande, car l'erreur est de un jour au bout de 3 600 ans.

La réforme imposée était impopulaire, mais Riccioli (2) raconte que certains de ces miracles qui se produisent à des époques fixes — comme, par exemple, la liquéfaction du sang de Saint-Janvier —

(1) *Romani Calendarii a Greg.XIII, restituti explicatio*, Rome, 1603.
(2) *Chronologia Reformata* Bonn, 1669, vol. II, p. 206.

étant survenus régulièrement et conformément aux indications du nouveau calendrier, la bulle papale fut considérée comme ayant reçu une sanction divine (*Deo ipso huic correctioni Gregorianæ subscribente*) et on l'accepta comme un mal nécessaire.

En Angleterre, un bill pour l'application de la réforme fut présenté en 1584, mais il fut retiré après une seconde lecture, et ce n'est qu'en 1752 que le changement fut définitivement adopté : on diminua cette année de onze jours. Dans les pays catholiques romains, le nouveau style date de 1582. Le changement fut fait en 1600 en Écosse, en 1700 dans les provinces luthériennes de l'Allemagne et en 1782 en Irlande. Tout le monde sait que l'Église grecque a conservé l'usage du calendrier Julien.

L'année des Mahométans contient douze mois lunaires, ou trois cent cinquante-quatre jours un tiers, et, par suite, ne présente aucune corrélation avec les saisons.

La réforme grégorienne a été provoquée par la nécessité de conserver Pâques toujours à la même époque de l'année. La date de Pâques dépend de celle de l'équinoxe du printemps, et comme, d'après le calendrier Julien, l'année a une durée moyenne de 365,25 jours, au lieu de 365,242216 jours, l'équinoxe du printemps tendait de plus en plus à se rapprocher du commencement de l'année et en 1582 il avait retrogradé jusque vers le 20 février.

La date de Pâques se détermine comme il suit (¹) : en 325, le Concile de Nicée avait décidé que l'on conserverait les usages des Romains. Or, après 463 (ou peut-être 530) il fut décrété à Rome que le jour de Pâques serait le premier dimanche après la pleine lune qui arrive à l'équinoxe du printemps ou très peu après. — On admettait que la pleine lune arrivait le quatorzième jour après celui de la nouvelle lune précédente (bien qu'en réalité elle se présente, d'après une estimation moyenne, après un intervalle un peu plus grand que quatorze jours trois quarts), et que l'équinoxe du prin-

(¹) De Morgan. — *Companion to the Almanac*, Londres. 1845, pp. 1-36.

temps tombe le 21 mars (bien qu'il puisse parfois tomber le 22 mars).

Grégoire conserva cette règle et respecta ces suppositions pour cette raison qu'il aurait été absolument inopportun de modifier des usages auxquels se rattachaient tant de traditions ; mais pour éviter toute contestation relativement à la détermination exacte de la nouvelle lune, on fit intervenir en appliquant la règle un soleil moyen et une lune moyenne définis par Clavius. Une des conséquences de l'emploi de ce soleil moyen et de cette lune moyenne et de l'introduction d'une définition artificielle de la pleine lune est qu'il peut arriver (ainsi, d'ailleurs, que le fait s'est produit en 1818 et en 1845) que la pleine lune réelle arrive le dimanche de Pâques. Dans la loi britannique, 24 Géo. II, chap. 23, la clause explicative définissant la pleine lune est omise, mais en pratique on donne à l'expression pleine lune la même signification que l'Église romaine, de sorte que les règles anglicanes et romaines sont identiques. Jusqu'en 1774, les états luthériens de l'Allemagne utilisèrent le soleil et la lune réels. Si l'on comprend que pleine lune signifie le quinzième jour de la lune (comme c'est le cas dans le calendrier civil) la règle peut se présenter sous cette forme : le jour de Pâques est le dimanche coïncidant, ou le plus voisin, de la pleine lune du calendrier qui arrive aussitôt après le 21 mars.

En acceptant le calendrier grégorien avec toutes ses prescriptions, il subsiste encore une particularité dans cette définition du jour de Pâques qui peut amener la célébration de cette fête à des époques différentes. Cela provient de ce qu'on a introduit le temps local. Par exemple, la différence entre le temps local de Rome et celui de Londres est d'environ cinquante minutes ; par suite, le moment de la première lune aussitôt après l'équinoxe du printemps pourrait tomber à Rome dans la matinée d'un dimanche (soit à douze heures trente après minuit), tandis qu'en Angleterre il arriverait encore dans la soirée du samedi (à onze heures quarante avant minuit) ; dans

(1) De Morgan. — *Companion to the Almanac*, 1846, pp. 1-10.

ce cas, Pâques serait célébré en Angleterre une semaine plus tôt qu'à Rome. Cette difficulté avait été prévue par Clavius, et l'Église romaine sur toute la surface de la terre conserva Pâques le jour du mois déterminé par l'application de la règle à Rome. Mais il est à présumer que le Parlement Britannique entendait déterminer le temps par rapport au méridien de Greenwich, et si cela est, la date de Pâques peut différer d'une semaine dans les cultes anglican et romain ; nous ignorons si le cas s'est jamais présenté ou s'il a été discuté, et nous laissons aux ecclésiastiques le soin d'examiner comment la question doit être traitée.

La méthode usuelle pour déterminer la date du jour de Pâques chaque année est un peu confuse et il est possible que plusieurs de nos lecteurs ne connaissent pas la simple règle suivante [1].

Soient m et n deux nombres que nous définirons plus loin.

(1) Divisons respectivement par 4, 7, 19 le nombre représentant l'année considérée et désignons par a, b, c les restes respectifs ;

(2) divisions $19.c + m$ par 30, et soit d le reste de l'opération :

(3) divisons encore $2a + 4b + 6d + n$ par 7 et soit e le nouveau reste.

(4) Cela fait, la pleine lune de Pâques se présente d jours après le 21 mars, et le jour de Pâque est le $(23 + d + e)^{me}$ de mars ou le $(d + e - 9)^{me}$ jour d'avril, avec ces exceptions cependant que si le calcul donne $d = 29$ et $e = 6$ (comme cela arrivera en 1981), le jour de Pâques est le 19 avril et non le 26 avril, et si le calcul donne $d = 28$, $e = 6$, avec $c > 10$ (comme le fait se présentera en 1954), le jour de Pâques est le 18 avril et non le 25, c'est-à-dire que dans ces deux cas, Pâques arrive une semaine plutôt que l'indique la règle.

Ces deux cas exceptionnels ne se présentent jamais avec le calendrier Julien, et avec le calendrier grégorien il ne se produisent que très rarement.

[1] Elle est due à Gauss, et sa démonstration se trouve dans Zach, *Monatliche Correspondenz*, août 1800, vol. II, pp. 221-230.

Il reste à donner les valeurs de m et n suivant les périodes. Dans le calendrier Julien $m = 15$, $n = 6$. Dans le calendrier grégorien, on a :

Périodes	1582-1699	1700-1799	1800-1899	1900-2099	2100-2199	2200-2299	2300-2399	2400-2499
Valeur de m. . . .	22	23	23	24	24	25	26	25
Valeur de n. . . .	2	3	4	5	6	0	1	1

Ainsi pour l'année 1908, nous avons $m = 24$, $n = 5$; par suite $a = 0$, $b = 4$, $c = 8$, $d = 26$ et $e = 2$; le jour de Pâques se présente donc le 19 avril. Après l'année 4 200, la forme de la règle devra être légèrement modifiée.

La lettre dominicale et le nombre d'or du calendrier ecclésiastique peuvent se déduire en même temps des valeurs de b et de c. L'épacte (ou l'âge de la lune au commencement de l'année) peut également se calculer aisément dans chaque cas particulier d'après les données qui précèdent ; la formule générale a été donnée par Delambre, mais elle est appliquée si rarement, à moins que ce ne soit par les astronomes de profession et par les fabricants d'almanachs, que nous jugeons inutile de la mentionner ici.

Nous pouvons éviter d'avoir à nous rappeler les valeurs de m et de n en remarquant que si $\left(\frac{N}{x}\right)$ représente la partie entière du quotient de la division de N par x, N étant l'année considérée, m est le reste obtenu en divisant $15 + \xi$ par 30, et n le reste donné par la division de $6 + \eta$ par 7 : dans le calendrier Julien $\xi = 0$, $\eta = 0$ et dans le calendrier grégorien

$$\xi = \left(\frac{N}{100}\right) - \left(\frac{N}{400}\right) - \left(\frac{N}{300}\right), \text{ et } \eta = \left(\frac{N}{100}\right) - \left(\frac{N}{400}\right) - 2.$$

En employant ces valeurs de m et de n, et en posant

$$a = N - 4\left(\frac{N}{4}\right),\ b = N - \left(\frac{N}{7}\right),\ e = N - 19\left(\frac{N}{19}\right),$$

la règle donnée plus haut se présente sous la forme suivante :

« On divise $19\,N - \left(\frac{N}{19}\right) + 15 + \xi$ par 30, et on représente « par d le reste de l'opération. On divise ensuite ;

$$6\,(N + d + 1) - \left(\frac{N}{4}\right) + \eta$$

« par 7 et on représente par e le reste. La pleine lune de Pâques « est le d^{me} jour après le 21 mars, et le jour de Pâques est le « $(22 + d + e)^{me}$ jour de mars, ou le $(d + e - 9)^{me}$ jour d'avril « suivant les cas ; mais comme plus haut, si le calcul donne $d = 29$ « et $e = 6$; ou $d = 28$, $e = 6$ et $c > 10$, le jour de Pâques est le « $(d + e - 16)^{me}$ jour d'avril ».

Ainsi pour $N = 1899$, nous divisons $19 \times 1899 - 99 + 15 + (18 - 4 - 6)$ par 30, ce qui donne $d = 5$, puis nous divisons $6\,(1899 + 5 + 1) - 474 + (18 - 4 - 2)$ par 7, ce qui donne $e = 6$; par suite le jour de Pâques sera le 2 avril.

Les règles précédentes comprennent tous les cas étudiés avec tant de soin par Clavius et d'autres astronomes [1].

Nous donnerons ici une règle, citée par Zeller pour déterminer le jour de la semaine qui correspond à une date déterminée quelconque. Supposons que le p^{me} jour du q^{me} mois de l'année N,

[1] La plupart des renseignements qui précèdent sur le calendrier sont empruntés à l'*Astronomie* de Delambre, Paris, 1814. vol, III, chap. XXXVIII ; et à son *histoire de l'Astronomie moderne*, Paris, 1821, vol. I, chap. I : voir aussi A. De Morgan, *the Book of Almanacs,* Londres, 1851 ; S. Butcher, *the Ecclesiastical calendar*, Bublin, 1877 ; et C. Zeller, *Acta Mathematica,* Stockholm, 1887, vol. IX, pp. 131-136. Pour les détails chronologiques, voir J. L. Ideler, *Lehrbuch der Chronologie*, Berlin, 1831.

anno domini, soit le r^{me} jour de la semaine, à compter du samedi précédent. Alors r est le reste obtenu en divisant par 7 l'expression

$$p + 2q + \left(\frac{3(q+1)}{5}\right) + N + \left(\frac{N}{4}\right) - \eta,$$

en considérant respectivement janvier et février comme le treizième et le quatorzième mois de l'année précédente.

Par exemple, Colomb découvrit le Nouveau Monde le 12 octobre 1492 (vieux style) ; ici $p = 12$, $q = 10$, $N = 1492$, $\eta = 0$ et en divivisant $12 + 20 + 6 + 1492 + 373$ par 7, on trouve $r = 6$; donc c'était un vendredi.

De même Charles Ier fut exécuté le 30 janvier 1649 (vieux style). Dans ce cas $p = 30$, $q = 13$, $N = 1648$, $\eta = 0$, et nous trouvons $r = 3$: c'était dès lors un mardi.

Comme dernier exemple, la bataille de Waterloo fut livrée le 18 juin 1815 ; ici $p = 18$, $q = 6$, $N = 1815$, $\eta = 12$, et nous trouvons $r = 1$. Elle eut donc lieu un dimanche.

Continuons maintenant en donnant un simple aperçu de quelques-uns des moyens autrefois en usage pour mesurer le temps.

Les plus anciennes inventions dont nous ayons connaissance sont celles des *styles* ou *gnomons* construits en Égypte et en Asie Mineure. Ils consistaient en tiges montées verticalement sur une tablette horizontale et entourées de trois cercles concentriques tels que toutes les deux heures l'extrémité de l'ombre portée par la tige passait d'une circonférence sur l'autre. Quelques-uns de ces appareils ont été trouvés à Pompéi et à Tusculum.

La construction des *cadrans solaires* repose sur le même principe. Ils consistent en une tige ou style fixé sur une plaque rectangulaire ou sur un cadran ; généralement, mais cela n'est pas nécessaire, le style est disposé suivant une direction parallèle à l'axe terrestre. Le soleil projette l'ombre du style sur des lignes tracées sur le cadran et correspondant aux diverses heures de la journée.

Le cadran solaire le plus ancien dont l'histoire fasse mention est

celui construit par Berosus en 540 A. C. Meton en construisit un à Athènes en 433 A. C. Le premier cadran solaire à Rome est attribué à Papirius Cursor en 306 A. C. Des cadrans solaires portatifs avec une boussole fixée sur la face, ont été longtemps employés en Orient et en Europe, D'autres instruments portatifs à peu près semblables étaient en usage en Europe au Moyen âge, nous citerons principalement les anneaux solaires (que nous décrivons plus loin) et les cylindres solaires (1),

L'on ignore généralement, pensons-nous, qu'on peut construire un cadran solaire de façon que l'ombre se déplace en sens contraire sur le cadran pendant un petit espace de temps dans le voisinage du lever et du coucher du soleil (2). Ce fait a été découvert par Nunez et en voici l'explication. Chaque jour le soleil paraît décrire un cercle autour du pôle et la ligne joignant la pointe du style au soleil décrit un cône droit dont l'axe est dirigé vers le pôle. La section de cette surface conique par le cadran est la courbe décrite par l'extrémité de l'ombre, et c'est comme l'on sait une conique. Dans notre latitude lé soleil est au dessus de l'horizon seulement pendant une partie des vingt-quatre heures du jour, et, par conséquent, l'extrémité de l'ombre du style ne décrit qu'une partie de la conique. Soit QQ′ l'arc décrit par l'extrémité de l'ombre du style du lever du soleil en Q au coucher en Q′ ; représentons par S la pointe et par F le pied du style, c'est-à-dire le point où il rencontre le plan du cadran. Supposons que le cadran soit placé de telle sorte que les tangentes menées par F à la conique QQ′ soient réelles et que les points de contact, P et P′, se trouvent sur l'arc QQ′. Si ces deux conditions sont remplies, l'ombre rétrogradera (dans l'angle QFP) lorsque ses extrémités se déplaceront de Q à P elle avancera (dans l'angle PFP′) lorsque ses extrémités iront de P

(1) Ainsi Chaucer dans le *Récit du matelot*, « par mon cylindre c'est l'aurore du jour », et Lydgate dans le *siège de Thèbes*, « par mon cylindre je commence à voir qu'il est bientôt neuf heures ».

(2) Ozanam. — Edition de 1803, vol. III, p. 321 ; édition de 1840, p. 529.

en P′, et enfin elle rétrogradera (dans l'angle P′FQ′) pendant que ses extrémités se déplaceront de P′ en Q′.

Si la course diurne apparente du soleil est coupée par l'horizon (comme cela se produit toujours aux latitudes tempérées et tropicales) et si le plan du cadran est horizontal, l'arc QQ′ forme en totalité une branche d'hyperbole et les conditions ci-dessus énoncées sont remplies, si F se trouve compris dans l'espace limité par cette branche d'hyperbole et ses asymptotes. Comme cas particulier, dans un lieu dont la latitude est 12° N., le jour où le soleil est dans le tropique septentrional (du cancer), l'ombre sur un cadran dont le plan est horizontal et le style vertical rétrogradera pendant près de deux heures entre le lever du soleil et midi.

Si, dans le cas d'un cadran solaire donné, placé dans une certaine position, les conditions énoncées ne sont pas remplies, il est possible d'y satisfaire en inclinant le cadran d'un angle convenablement choisi.

L'explication rationnelle qui a été présentée par les encyclopédistes français du miracle concernant Isaïe et Ezéchias [1], repose sur ce fait. Le style étant pris perpendiculaire à la surface du cadran, traçons la sphère céleste et supposons que le soleil, se levant en M, soit à point culminant en N. Prenons un point L entre M et N sur la courbe décrite par le soleil dans son mouvement diurne et traçons un grand cercle tangent en L à cette courbe ; soient A, A′ les points où ce grand cercle coupe le méridien céleste et supposons que l'arc AL soit plus petit que l'arc A′L et, par suite, moindre qu'un quadrant. Si le style est dirigé vers A, alors quand le soleil approche de L l'ombre rétrograde, tandis qu'elle avance quand le soleil dépasse le point L. Ainsi, le cadran étant placé de façon qu'un style qui lui est normal passe par le milieu du méridien entre l'équateur et les tropiques, l'ombre rétrogradera entre

[1] Les Rois. 2. chap. XX, V, 9-11.

le lever du soleil et midi du jour le plus long, dans un angle donné par l'expression

$$\text{arc sin}\left(\cos\omega \sec\frac{1}{2}\omega\right) -$$
$$-\text{arc cotg}\left\{\sin\omega\cos\left(l-\frac{1}{2}\omega\right)\left(\cos^2 l-\sin^2\omega\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

dans laquelle l est la latitude du lieu et ω l'obliquité de l'écliptique.

La remarque précédente s'applique au cadran solaire usuellement employé.

En 1892, le général Oliver introduisit à Londres un cadran ayant un style massif dont la section était une certaine courbe ayant une forme déterminée d'une façon empirique par la valeur de l'équation du temps en tant que comparée avec la déclinaison du soleil (1). L'ombre du style sur le cadran donne le temps moyen local, mais il est bien entendu que pour établir correctement le cadran en chaque lieu, il est nécessaire d'en connaître la latitude ; le cadran peut aussi être disposé de façon à donner le temps moyen de toute autre localité dont la longitude relativement au lieu d'observation est connue.

L'*anneau-soleil* ou le *cadran-anneau* est un autre instrument utilisé pour la mesure du temps solaire (2). La figure ci-dessous représente un des modèles les plus simples. L'anneau-soleil consiste en une mince bande de laiton d'environ 0m,006 de largeur, courbée en cercle et glissant entre deux anneaux circulaires fixes. Les rayons des cercles sont d'environ 0m.025. La bande est percée d'un trou et quand l'anneau est suspendu par un point fixe de son contour de façon à se tenir dans un plan vertical contenant le soleil, la lumière solaire pénétrant par ce trou produit un point lumineux sur la sur-

(1) Une description de ce cadran-solaire avec un diagramme a été donnée dans le journal *Knowledge*, du 1er juillet 1892, pp. 133-134.

(2) Voir *Ozanam*, édition de 1803, vol. III, p. 317 ; édition de 1840, p. 526.

face concave de l'anneau c'est-à-dire à l'intérieur. Les heures sont marquées sur cette surface et, si l'anneau est convenablement réglé, le point brillant tombe sur l'heure qui indique le temps solaire. Le réglage pour le temps de l'année s'effectue comme il suit : les anneaux entre lesquels la bande peut glisser portent sur leur surface convexe les noms des mois et la bande centrale doit être déplacée entre eux jusqu'à ce que le trou soit opposé au mois pour lequel le cadran doit être employé.

On peut se fier aux indications de l'instrument pour déterminer

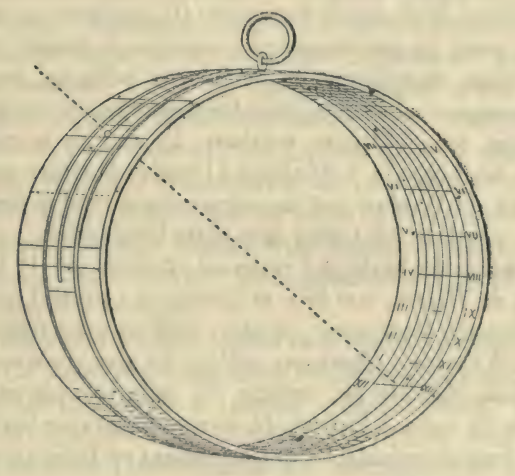


Fig. 76

le temps dans le voisinage de midi, mais pour les autres heures de la journée, il n'est exact que si le temps de l'année est convenablement choisi, généralement dans le voisinage des équinoxes. Ce défaut peut être corrigé en marquant les heures sur une bande courbe de laiton fixée à la surface concave des anneaux. Nous avons en notre possession deux spécimens de ces sortes d'anneaux.

Ces anneaux étaient très répandus, l'un de nos deux spécimens a

été acheté dans le Tyrol autrichien et l'autre à Londres. Les Astrolabes peuvent être employés pour le même usage.

Les *clepsydres* (ou horloges à eau) et les *sabliers* (ou horloges de sable) nous fournissent d'autres moyens de mesurer le temps. Le temps mis par une certaine quantité de liquide (ou de sable) pour s'écouler par un orifice donné, dans les mêmes conditions, est toujours la même, et en notant le niveau du liquide qui s'est écoulé par l'orifice, ou qui reste à passer, on peut obtenir une mesure du temps. L'usure de bougies graduées nous donne encore un autre moyen d'évaluer le temps.

Les *horloges* modernes et les *montres* (1) consistent en un système de roues mises en mouvement par un poids, un ressort, ou par tout autre système, et réglées par un pendule, un balancier, un volant, ou un autre corps en mouvement dont les déplacements sont périodiques et le temps des oscillations constant. Le sens de la rotation des aiguilles des horloges a été choisi à l'origine le même que celui de la marche de l'ombre sur un cadran solaire dont la face est horizontale ; le cadran étant situé dans notre hémisphère.

L'invention des horloges à roues est attribuée par la tradition à Pacificus de Vérone, vers 850, et également à Gerbert qui en aurait construit une à Madebourg, en 996 : mais on a des raisons de supposer qu'il s'agissait d'horloges solaires. La plus ancienne horloge à roues dont l'histoire est certaine fut celle envoyée par le sultan d'Egypte, en 1232, à Frédéric II, bien qu'il paraisse hors de doute que des horloges semblables se fabriquaient en Italie au moins cinquante ans plus tôt.

En Angleterre, la plus ancienne horloge dont nous pouvons parler avec connaissance est celle érigée en 1288, dans, ou près du château de Westminster à la suite d'une amende infligée à un premier Président prévaricateur. Les cloches et probablement l'horloge, furent jouées et perdues par Henri VIII, sur un coup de dés, mais

(1) Voir : *Clock and Watch Making*, par Lord Grinthorpe, 7e édition, Londres, 1883.

l'emplacement fut marqué par un cadran solaire, détruit il y a environ cinquante ans, et qui portait l'inscription : *Discite justiciam moniti*. L'horloge de la cathédrale de Canterbury contruite en 1292 coùta 30 £. Celle érigée à l'Abbaye de Glastonburg en 1325, est actuellement au musée de Kensington et fonctionne régulièrement Une autre, construite en 1326 pour l'Abbaye de Saint-Alban, indique tous les phénomènes astronomiques et paraît avoir été l'une des plus anciennes horloges ainsi perfectionnées. L'horloge de Douvres montée en 1348 marche avec régularité. Les horloges de Peterborough et d'Exeter sont à peu près de la même époque et plusieurs de leurs organes demeurent *in situ*. La plupart de ces anciennes horloges étaient réglées par des balanciers horizontaux ; le pendule étant alors inconnu. Parmi les horloges soignées d'une époque moins reculée, celle de Strasbourg construite par Dasypodius en 1571, et celle de Lyon construite par Lippeus en 1598, sont principalement remarquables : la première a été restaurée en 1842, de telle manière qu'il est resté peu de chose de l'ancien travail. En 1370, Vick construisit pour Charles V une horloge à contre-poids et à échappement. C'était un grand perfectionnement apporté aux anciennes et grossières horloges.

Les plus anciennes horloges réglées au moyen du pendule paraissent avoir été inventées d'une façon accidentelle en 1621, par un horloger de Covent-Garden à Londres, nommé Harris, mais la théorie de ces horloges est due à Huygens [1]. Galilée avait découvert antérieurement l'isochronisme des oscillations du pendule, mais ne l'avait pas appliqué à la régularisation du mouvement des horloges. Hooke construisit de semblables horloges et il est possible qu'il découvrit, lui aussi, l'usage du pendule.

Une montre peut se définir une horloge qui marche dans toutes les positions. Des montres, un peu grossières il est vrai, étaient fabriquées à Nuremberg par P. Hele dès le commencement du XVI[e] siècle. Le mouvement était donné par un ruban d'acier enroulé

[1] *Horologium oscillatorium*, Paris, 1673.

sur une tige et relié par l'une de ses extrémités à une série de roues qui étaient mises en marche pendant qu'il se déroulait. Il est probable que quelques montres du même genre datent d'une époque antérieure mais à la fin du XVI[e] siècle elles étaient assez répandues. Il était d'usage à cette époque de leur donner des formes fantastiques, par exemple de têtes de mort ou d'énormes pendeloques, mais vers 1 620 on commença à les fabriquer sur la forme plate et ovale qui permettait de les porter plus commodément dans une poche ou suspendue à une partie du vêtement. Leur construction se perfectionna considérablement dans le XVII[e] siècle, notamment par l'introduction du ressort balancier proposé par Huygens en 1674, et indépendamment par Hooke en 1675. Ces deux mathématiciens avaient découvert que les petites vibrations d'un ressort enroulé, ayant une de ses extrémités fixe, sont pratiquement isochrones. La fusée avait déjà été employée en 1525 par R. Zech de Prague, mais elle fut réinventée par Hooke.

Les horloges et les montres sont généralement mises en mouvement et réglées comme nous venons de l'expliquer, cependant on rencontre occasionnellement d'autres forces motrices et des inventions très ingénieuses pour régler le mouvement. Nous pouvons citer une horloge ayant la forme d'un cylindre (relié à un autre poids comme dans la machine d'Atwood) se déplaçant sur un plan incliné mais si lentement qu'elle met douze heures pour descendre et de telle façon que le point le plus élevé de la surface marque toujours l'heure (1). Ozanam décrit une horloge à eau, à peu près de la même forme, et qui au commencement du dernier siècle était une curiosité à Paris (2). L'horloge était constituée par un cylindre creux divisé en plusieurs compartiments contenant un peu de mercure et arrangés de telle sorte que le cylindre descendait avec une vitesse uniforme entre deux piliers verticaux sur lesquels les heures étaient marquées à des intervalles équidistants.

(1) OZANAM. — Édition de 1803, vol. II, p. 39 ; édition de 1840, p. 212, ou *La Nature*, 23 janvier 1892, pp. 123, 124.

(2) OZANAM. — Édition de 1803, vol. II, p. 68 ; édition de 1840, p. 225.

On trouvera bien d'autres ingénieuses façons de dissimuler la force motrice dans les colonnes de *La Nature* (1). Parmi ces pendules mystérieuses, les suivantes sont peut-être connues de plusieurs de nos lecteurs. L'une d'elles consiste en un cadran en cristal suspendu au moyen de deux tiges très minces, les aiguilles sont en métal et tout le mécanisme est caché dans leur épaisseur ou dans le pivot. Une autre est formée de deux feuilles de verre réunies par les bords dans un même cadre contenant un ressort qui imprime à la feuille postérieure un très léger mouvement d'oscillation — mouvement qui n'est perceptible que pour ceux qui examinent attentivement l'appareil — et chaque oscillation fait mouvoir les aiguilles qui se déplacent de l'angle convenable. — Nous avons décrit précédemment, pp, 88, 89, 2e partie quelques horloges destinées à produire le mouvement perpétuel. Nous avons vu dernièrement en France une horloge dans laquelle les aiguilles cachées derrière le cadran portaient chacune un aimant, de petits morceaux de fer représentant des insectes étaient placés sur le cadran, et indiquaient les heures en suivant le mouvement des aiguilles.

La position du soleil par rapport à la direction Nord-Sud détermine le temps solaire. Inversement, si nous considérons le temps indiqué par une montre comme étant le temps solaire (et il n'en diffère en réalité que de quelques minutes) et si nous observons la position du soleil, nous pouvons déterminer cette direction N-S (2). Il suffit pour cela de diriger l'aiguille des heures vers le soleil et de tracer la direction qui partage en deux parties égales l'angle compris entre l'heure et le chiffre XII du cadran ; cette direction est celle du Sud. Par exemple, s'il est quatre heures après midi, on amènera l'aiguille des heures (qui marque IIII) dans la direction du soleil,

(1) Voir principalement les volumes parus en 1874, 1877 et 1878.

(2) La règle est donnée par W. H. Richards. — *Military Topography*, Londres, 1883, p. 31, bien qu'elle ne soit pas établie d'une façon absolument correcte. Nous ne savons par qui elle a été énoncée pour la première fois.

et le nombre II sur le cadran donne la direction du Sud. De même, s'il est huit heures du matin, on dirige vers le soleil la pointe de l'aiguille des heures (qui marque VIII, et la figure X du cadran donne la direction Sud.

Entre six heures du matin et six heures du soir, l'angle qui doit être divisé en deux parties égales, et qui est compris entre l'heure marquée par la montre et XII est plus petit que 180° ; mais pour les autres moments de la journée, l'angle à bissecter est plus grand que 180° ; ou peut-être serait-il plus simple de dire que la construction donne le point Nord au lieu du point Sud.

L'explication est la suivante. A midi, le soleil est dans la direction Sud et il fait un tour complet autour de la ligne méridienne en vingt-quatre heures. L'aiguille des heures fait également un tour complet en douze heures. Par suite, la montre étant tenue dans le plan de l'écliptique avec le cadran apparent, et le nombre XII du cadran étant dirigé vers le Sud, l'aiguille des heures et le soleil seront en même temps dans cette direction à midi. Tous les deux tournent dans le même sens, mais la vitesse angulaire de l'aiguille des heures est le double de celle du soleil ; d'où résulte la règle. L'erreur la plus grande, pouvant provenir de ce qu'on a négligé l'équation du temps, est moindre que 2°. Il va sans dire que dans les applications courantes au lieu de tenir la face de la montre dans le plan de l'écliptique, on la dispose horizontalement, mais il ne résulte de ce fait, dans notre latitude, aucune erreur sérieuse.

Dans l'hémisphère du Sud, où à midi, le soleil est dans la direction du Nord, la règle est à modifier. Dans ce cas, l'aiguille des heures d'une montre (tenue face apparente dans le plan de l'écliptique) et le soleil se déplacent en sens contraires. Par suite, en disposant la montre de telle sorte que l'heure XII soit dirigée vers le soleil, la bissectrice de l'angle formé par l'heure de la journée et le nombre XII du cadran donnera la direction Nord.

QUELQUES QUESTIONS CURIEUSES

—

La durée de l'année surpasse 365 jours, et c'est pour cette raison que l'on intercale tous les 4 ans un 366e jour (année bissextile) ; ce 366e jour est supprimé tous les 100 ans et rétabli tous les 400 ans. Prouver que si l'on suivait indéfiniment la même loi, c'est-à-dire si l'on supprimait le 366me jour tous les 100^2 ans pour le rétablir tous les 4.100^2 ans, qu'on le supprimât tous les 100^3 ans, pour le rétablir tous les 4.100^3 ans, etc., cela reviendrait, après un nombre immense d'années, à ajouter 8 jours tous les 33 ans.

Considérons d'abord une période de 400 ans ; sur ces 400 ans, il y a (100 — 4 + 1) années bissextiles, par suite le rapport du nombre des années bissextiles au nombre total des années considéré est

$$\frac{100 - 4 + 1}{4.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{4.100}.$$

Soit, en second lieu, une période de 4.100^2 années ; par hypothèse on compte dans ces 4.100^2 années

$$(100^2 - 4.100 + 100 - 4 + 1) \text{ années bissextiles,}$$

et le rapport du nombre de ces années au nombre total de 4.100^2, est

$$\frac{100^2 - 4.100 + 100 - 4 + 1}{4.100^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{4.100} - \frac{1}{100^2} + \frac{1}{4.100^2}.$$

Considérons encore une période de 4.100^3 années qui contient.

$$(100^3 - 4.100^2 + 100^2 - 4.100 + 100 - 4 + 1) \text{ années bissextiles.}$$

Le rapport entre ce nombre et le nombre total 4.100^3, a pour expression

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{100}+\frac{1}{4.100}-\frac{1}{100^2}+\frac{1}{4.100^2}-\frac{1}{100^3}+\frac{1}{4.100^3}.$$

On voit, sans peine, que cette loi se poursuit indéfiniment, de sorte qu'en considérant un nombre infiniment grand d'années, le rapport du nombre des années bissextiles au nombre total des années peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{100}+\frac{1}{4.100}-\frac{1}{100^2}+\frac{1}{4.100^2}-\frac{1}{100^3}$$
$$+\frac{1}{4.100^3}-\frac{1}{100^4}+\frac{1}{4.100^3}-\ldots$$

et la question revient à démontrer que cette expression tend vers $\frac{8}{33}$.

Or, elle revient à

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\ldots\right)-\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\ldots\right)$$

ou bien encore à

$$\frac{1}{4}\times\frac{100}{99}-\frac{1}{99}=\frac{100-4}{99\times 4}=\frac{24}{99}=\frac{8}{33}.$$

Trouver une formule donnant tous les quantièmes d'années dans lesquelles le mois de février a cinq dimanches (1).

Il est évident que les années demandées sont bissextiles, et que le 1er février doit y être le dimanche ; d'ailleurs, quand le 1er février est un dimanche, le 1er janvier est un jeudi. La question est donc ramenée à la suivante :

(1) Question 128 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (T. V. p. 448). Nous reproduisons la solution donnée par M. E. Coupy. (T. XII, p. 126).

Quelles sont les années bissextiles commençant par un jeudi ?

1. — Résolvons d'abord la question pour le calendrier Julien, ce qui est beaucoup plus simple ; et nous passerons ensuite au calendrier grégorien. On sait que dans le calendrier Julien, les dates de l'année reviennent périodiquement aux mêmes jours de la semaine, après une période de vingt-huit ans, dite *cycle solaire*. Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé dans ce calendrier une année répondant à la question, et soit A le millésime de cette année ; il est clair que $A + 28n$, n étant un entier quelconque positif ou négatif, répondra à la question. Il faut prouver qu'entre A et $A + 28$, il ne s'en trouve aucune de bissextile commençant par un jeudi ; or le jour de la semaine qui commence l'année avance de 5 rangs en 4 ans, ou de $5x$ rangs en $4x$ années, et la plus petite valeur de x qui rendra $5x$ multiple de 7, est évidemment $x = 7$. Ce sera donc seulement après $4.7 = 28$ ans, que l'année bissextile commencera par le même jour de la semaine que la bissextile A. Donc enfin $A + 28n$ est la formule demandée ; reste à déterminer la constante A.

Nous remarquerons d'abord que les jours de la semaine se correspondent aux dates prises dans les deux calendriers, Julien et Grégorien ; car Grégoire XIII, par son ordonnance de 1582, fit dater vendredi 15 Octobre le lendemain du jeudi 4 Octobre ; l'accord des jours de la semaine a donc continué à régner dans les deux calendriers. Or, on sait que l'année Julienne est maintenant en retard de 12 jours sur la nôtre ; le 1er janvier 1851 a donc été, dans ce calendrier, le même jour que notre 13 janvier, c'est-à-dire un lundi ; partant de là, il est facile de trouver que l'année Julienne bissextile 1876 a commencé par un jeudi, donc $1876 + 28n$ est la formule cherchée ; mais 1876 est un multiple de 28, ce qui réduit simplement à $28n$ la formule demandée.

2. — Résolvons maintenant la question pour le calendrier grégorien. Supposons encore que, par un moyen quelconque, on ait pu déterminer dans ce calendrier la date B d'une année répondant à la question.

Nous appellerons *années grégoriennes*, les années séculaires qui ne sont pas bissextiles. Cela étant, il est clair que $B + 28n$, n étant entier positif, sera encore une date convenable, pourvu que $B + 28n$ pour la valeur donnée à n, ne passe pas par dessus une ou plusieurs années grégoriennes ; s'il en était autrement, voyons quelle correction devrait subir la formule. Dans le calendrier Julien le jour de la semaine qui commence l'année avance, avons-nous dit, de $5x$ rangs en $4x$ années ; mais si nous passons par une année grégorienne, il n'avancera plus que de $(5x - 1)$ rangs ; expression qui est un multiple de 7 pour $x = 3$, ou $x = 10$. Or $x = 3$ donnerait $4x = 12$, et ce nombre < 28 doit être rejeté comme on verra plus loin ; reste donc seulement $x = 10$, d'où $4x = 40$. Donc quand on passera sur une grégorienne, il faudra augmenter de 40 ans, au lieu de 28, la date qui répondait à la question, pour avoir la date immédiatement suivante qui y répond aussi ; et comme $40 = 28 + 12$, il faudra donc augmenter $B + 28\,n$ d'autant de fois 12 qu'il y aura de grégoriennes depuis B. Avant d'établir la formule cherchons la constante B. Comme le calendrier grégorien ne date que de 1582, nous la chercherons dans le XVIIe siècle. Or on sait (voir Francœur, *Uranogrophie* page 111) que le 1er mars 1600 était un mercredi ; donc, comme l'année était bissextile, le 1er janvier 1600 était un samedi, d'où il est facile de conclure que le 1er janvier 1604 était un jeudi. On peut donc prendre pour B la valeur $B = 1604$, et par conséquent $1604 + 28\,n$; n étant égal à 1, 2, 3, c'est-à-dire 1632, 1660, 1688, répondent à la question ; mais ensuite 28 années, ajoutées à 1688, faisant passer sur la grégorienne 1700, il faut ajouter 40 à 1688, ce qui donne 1728 ; puis ensuite on aura 1756, 1784, puis $1784 + 40 = 1824$, parce qu'on passe la grégorienne 1800 ; et ainsi de suite,

Ainsi on peut former facilement le tableau suivant des années répondant à la question

1604	1728	1824	1920	2004	etc.
1632	1756	1852	1948	2032	
1660	1784	1880	1976	2060	
1688				2088	

l'année 2004 = 1976 + 28, parce que 2010 n'est pas grégorienne. Arrivé à la cinquième colonne de ce tableau, il est facile de le prolonger indéfiniment d'après la loi que nous avons indiquée, ou plus simplement, en se rappelant que dans le calendrier grégorien, après 400 années, la date de l'année répond au même jour de la semaine, car

$$365 \times 400 + 97 = 146097 \text{ jours} = \text{exactement } 20871 \text{ semaines ;}$$

ainsi retrouvons-nous, pour les dates de la cinquième colonne, les dates de la première augmentées chacune de 400 ans ; de même, les dates de la sixième colonne seraient celles de la deuxième augmentées de 400 ans, c'est-à-dire 2128, 2156, 2184, et ainsi de suite. Nous voyons aussi, par ce tableau, que 1604 est la première année, depuis l'établissement du calendrier grégorien, qui réponde à la question. On voit encore, pourquoi on doit exclure $4x = 12$, car 12 ajouté à 1688, ou à 1784, ou à 1880, ou enfin à 1796, ne fait passer par-dessus aucune année grégorienne. Enfin, on voit encore, par ce tableau, qu'il n'y a que 3 années par siècle, répondant à la question, excepté dans le siècle contenant la séculaire bissextile qui en renferme 4, ce qui fait 13 ans en quatre siècles.

Dans le calendrier Julien, elles reviennent périodiquement tous les 28 ans, et il y en a 14 dans le même laps de temps.

3. — Il résulte des considérations précédentes, que la formule demandée est

$$z = 1604 + 28 \,.\, n + 12 \,.\, p.$$

Il est facile de voir que tant que n est inférieur à 4, p est nul.
Faisons $n - 3 = 12\,m + r$; nous aurons

$$z = 1604 + 28\,n + 12\,(3m + \mathrm{R}).$$

R dépend de r de la manière suivante :

r	R
ne dépasse pas 3.	1,
dépasse 3 et ne dépasse pas 6	2,
dépasse 6	3.

C'est ce que qu'on voit en donnant à n, successivement, les 13 valeurs de la suite 4, 5, 6, ..., 16 ; et k étant un de ces nombres, la valeur de R revient la même pour les valeurs de $n = k + 13$.

Exemple. — Faisons

$$n = 8, \quad n - 3 = 5, \quad m = 0, \quad r = 5, \quad R = 2 ;$$

donc

$$z = 1604 + 28.8 + 12.2 = 1852.$$

Cette formule convient tant que le calendrier grégorien n'aura pas besoin de correction.

Déterminer combien il y a de vendredis 13 dans une période de 28 ans ? Dans une période de quatre cents ans ? (1)

Voici la solution de cette question donnée par M. Brocard dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (T. IV, 1897, p. 19).

Soient A, B, C trois jours consécutifs de la semaine. On sait que l'année grégorienne ordinaire de 365 jours commence et finit par un même jour A ; donc l'année suivante commence et finit par le jour C si elle est bissextile, ce qui arrive tous les 4 ans (à part une exception pour le millésime de certains siècles). Il en résulte que, dans le cours d'un siècle, les années de même rang par rapport aux multiples de 4 commencent à tour de rôle par les mêmes groupes de 4 jours consécutifs de la semaine et que pour épuiser le cycle, il faudra 7 fois 4 ou 28 ans. Ainsi, tous les 28 ans, dans le cours d'un même siècle, les vendredis 13 reviendront aux mêmes dates. Le dénombrement de ces dates est l'affaire de quelques minutes, et l'on arrive ainsi, en partant de l'année 1852, par exemple, à dresser le tableau suivant de 28 années, commençant respectivement par jeudi (J), ..., mercredi (N), et dans lesquelles les vendredis 13 surviennent au mois de février (2), août (8), mai (5), etc. L'astérique (*) indique les années bissextiles.

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens.* — Question 806. Tome IV, 1897, p.p. 16-19 et 271.

1	J*	2.8	8	S	5	15	L	4.7	22	N	6
2	S	5	9	D*	1.4.7	16	M	9.12	23	J	2.3.11
3	D	1.10	10	M	9.12	17	N*	3.11	24	V	8
4	L	4.7	11	N	6	18	V	8	25	S*	10
5	M*	6	12	J	2.3.11	19	S	5	26	L	4.7
6	J	2.3.11	13	V*	5	20	D	1.10	27	M	9.12
7	V	8	14	D	1.10	21	L*	9.12	28	N	6

Pour chaque siècle, on devra donc compter 48 vendredis 13 par intervalle de 28 ans, ce qui en donne 3 × 48 ou 144 en 84 ans, et, pour les 16 années restantes, un nombre variable à déduire du tableau, en ayant soin de déplacer l'origine suivant le premier jour du siècle considéré. Ainsi, pour le XIXe siècle, qui a commencé le 1er janvier 1801 (un jeudi) ; les 4 années suivantes correspondent à V, S, D*, M ; 1801 serait donc une année du type 6 dans le tableau, et, par conséquent, il faudrait, en réalité, le commencer par ce numéro. On aura donc, de 1801 à 1884 inclus, 144 vendredis 13. 1885 sera l'année du type 6 et 1899 du type 20, ce qui donne 144 + 27, ou 171 ; enfin 1900 n'est pas bissextile, de sorte qu'elle se place au n° 15, ce qui porte le total à 173.

On ferait le même calcul pour le XXe siècle, en observant que ce siècle commençant au 1er janvier 1901, c'est-à-dire un mardi (M) et non un mercredi (N), comme on pourrait le juger d'après le tableau, les quatre années suivantes correspondent à N, J, V*, D. Ainsi la nouvelle origine sera l'année du type 10.

Sur l'emploi du papier calque pour la solution graphique de problèmes de construction géométriques

D'après M. le capitaine Reinhart.

M. le capitaine Reinhart a publié dans la *Revue du Génie* (décembre 1907) un mémoire sur cette question. Nous croyons que sa méthode est très digne de fixer l'attention. Elle permet de résoudre immédiatement quelques problèmes difficiles avec une exactitude graphique aussi rigoureuse que par l'emploi de la règle et du compas, et s'étend à des problèmes qu'il serait impossible de résoudre avec la règle et le compas.

La méthode consiste à tracer sur le papier ordinaire certaines parties de la figure, d'autres sur le papier décalque, et à faire coïncider, ensuite certains points ou certaines lignes tracés sur le papier décalque, avec d'autres points ou d'autres lignes tracés sur le papier ordinaire, par une translation ou une rotation ou par les deux mouvements réunis.

Cette méthode a encore un autre avantage, elle permet à des enfants peu versés dans la géométrie de résoudre en se jouant des problèmes difficiles qu'ils seraient incapables d'aborder autrement, et peut leur inspirer l'amour de la géométrie. A ce point de vue, elle nous paraît mériter d'être introduite dans l'enseignement.

Exemples : 1° Placer un triangle ABC de manière que ses trois sommets soient sur trois droites DEF.

Les 3 droites D, E, F seront tracées sur le papier ordinaire et le triangle ABC sur le papier calque, il sera alors facile de faire glisser la feuille de papier calque jusqu'à ce que les points A, B, C se trouvent sur les droites P, E, F. On n'aura plus qu'à marquer avec une pointe de compas les points A, B, C.

A la vérité l'emploi du papier calque n'était pas indispensable pour la solution graphique de ce problème, on aurait pu découper le triangle A. B. C sur une feuille de papier mince, et le faire glisser ensuite jusqu'à ce que ses sommets soient sur D, E, F.

2° *Placer un triangle ABC, de manière que ses 3 côtés passent par 3 points donnés D. E. F.*

Le triangle ABC étant tracé sur le papier calque, on fera glisser la feuille de papier calque de manière que les côtés AB et AC passent par D et E, il sera ensuite facile de déplacer la feuille de papier

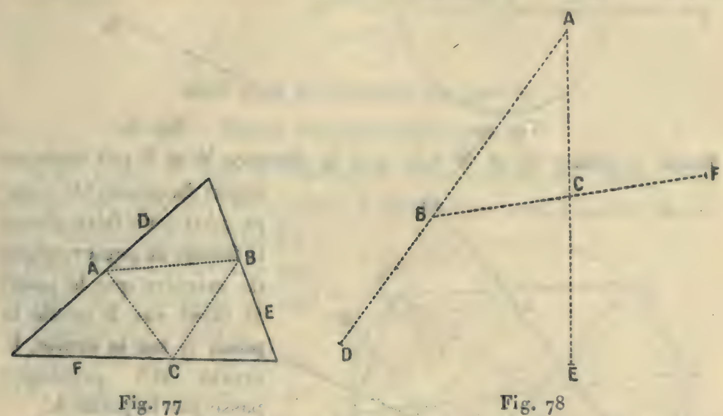


Fig. 77 Fig. 78

calque jusqu'à ce que BC passe par F, AB et AC passant toujours par les points D et E.

3° *Problème de la trisection de l'angle.*

On peut résoudre à l'aide du papier calque le problème célèbre de la trisection de l'angle qui a tant occupé l'antiquité et dont la solution ne peut être obtenue à l'aide de la règle et du compas.

Nous nous appuierons pour cela sur la remarque suivante :

Etant donné un angle A. OY. Je décris un cercle ayant O pour centre, et même la sécante AM. N. Si M. N est égal au rayon OM, l'angle ANO sera le $\frac{1}{3}$ de l'angle AOY.

En effet le triangle OMN étant isocèle, l'angle AMO extérieur au triangle OMN est égal à la somme des angles MON, MNO est par conséquent le double de l'angle N.

L'angle AOY extérieur au triangle AON est égal à la somme des angles A et N. Il est donc le triple de l'angle N.

Dès lors pour diviser l'angle AOY en trois parties égales il suffit de tracer sur le papier calque une droite MN et de marquer sur cette

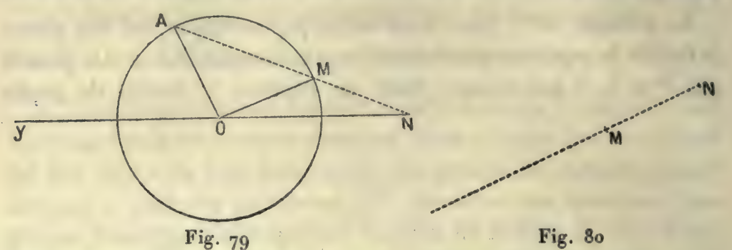


Fig. 79 Fig. 80

droite 2 points M et N tels que la distance M et N soit égale au rayon du cercle. On n'aura plus qu'à faire glisser la feuille de papier calque de manière que le point M étant sur le cercle le point N sur la droite, la droite MN prolongée passe par le point A.

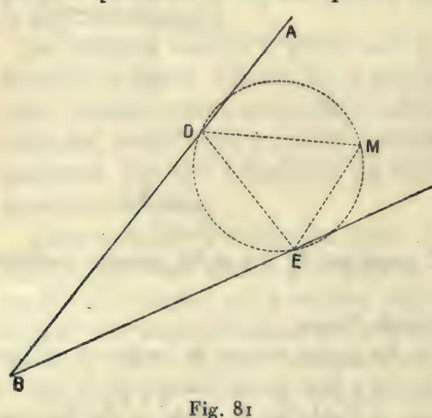


Fig. 81

Ainsi un enfant de 12 à 13 ans sera en état de résoudre le problème de la trisection de l'angle et de se rendre compte de la validité de sa solution.

4° *Etant donné un angle ABC, tracer entre les deux côtés de l'angle une droite DE de longueur donnée qui soit vue d'un point M sous un angle donné.*

On tracera sur la feuille de papier calque la droite DE et on décrira sur cette droite un segment capable de l'angle donné M, cela fait on fera glisser la feuille de papier calque de manière que DE s'appuyant toujours sur les droites AB et BC le segment passe par M.

Le problème sera alors résolu.

On résoudrait de la même manière le problème suivant : Etant

donné deux cercles O et O′ ou deux courbes quelconques tracer une droite AB de longueur donnée qui s'appuie sur les 2 cercles et qui soit vue d'un point M sous un angle donné.

Nous n'insistons pas davantage sur cette méthode évidemment susceptible de beaucoup d'autres applications.

Sur une propriété du cercle

Par le capitaine Reinhart

D'un point O pris à l'intérieur d'un cercle on mène trois droites ; en joignant leurs points d'intersection avec le cercle on obtient un hexagone ABCDEF ; le produit de 3 côtés non consécutifs de l'hexagone, est égal au produit des 3 autres.

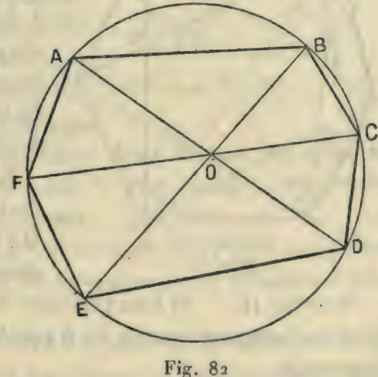


Fig. 82

Les deux triangles AOB, DOE étant semblables on a :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{OB}{OD}$$

de même

$$\frac{CD}{AF} = \frac{OC}{AO}$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{OE}{OC}$$

en multipliant les trois égalités on a :

$$\frac{AB \,.\, CD \,.\, EF}{BC \,.\, DE \,.\, AF} = \frac{OB \,.\, OC \,.\, OE}{OD \,.\, AO \,.\, OC} = \frac{OB \,.\, OE}{OD \,.\, AO}$$

mais

$$OB \,.\, OE = OD \,.\, OA$$

donc

$$AB \,.\, CD \,.\, EF. = BC \,.\, DE \,.\, AF.$$

Contribution à l'étude des hexagones inscrits et circonscrits à une conique

Par le capitaine Reinhart

Théorème I. — Si l'on joint deux à deux les sommets non opposés d'un hexagone circonscrit à une conique, on obtient un hexagone inscrit dans une autre conique.

Soit un hexagone ABCDEF, circonscrit à une conique joignons les sommets non opposés le nouvel hexagone MNPQRS est inscriptible.

En effet, si nous joignons BE, FC, AD, d'après le théorème de Brianchon, ces 3 droites sont concourantes. Les 2 triangles BFD, ACE, ayant leurs sommets sur les 3 droites concourantes, d'après la réciproque du théorème de Desargues, les points de rencontre de leurs côtés opposés sont en ligne droite.

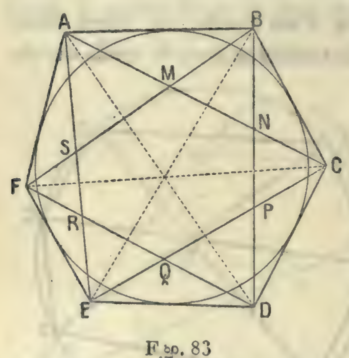


Fig. 83

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Pascal, l'hexagone MNPQRS est inscriptible dans une conique.

Théorème II. — Si l'on prolonge deux à deux les côtés non opposés d'un hexagone inscrit, les 6 points obtenus forment un hexagone circonscrit.

Soit en effet un hexagone inscrit MNPQRS ; prolongeons les côtés non opposés nous obtenons l'hexagone ABCDEF.

L'hexagone MNPQRS étant inscrit dans une conique, les côtés opposés des deux triangles BFD, ACE, se coupent, d'après le théorème de Pascal, suivant 3 points en ligne droite, donc, d'après le théorème de Desargues les droites qui joignent leurs sommets opposés FC, BE, AD concourent en un même point ; donc d'après le réciproque du théorème de Brianchon, l'hexagone ABCDEF est circonscrit à une conique.

Théorème III. — Si on joint les sommets non opposés d'un hexagone inscrit dans une conique l'hexagone intérieur ainsi formé est circonscrit à une autre conique.

Soit un hexagone inscrit ABCDEF, joignons les sommets non opposés, nous obtenons un hexagone MNPQRS.

Appliquons le théorème de Pascal au contour hexagonal inscrit CEBFDAC; il en résulte que les 3 points MTQ sont en ligne droite; par suite les 3 droites EB, AD, MQ sont concourantes [1].

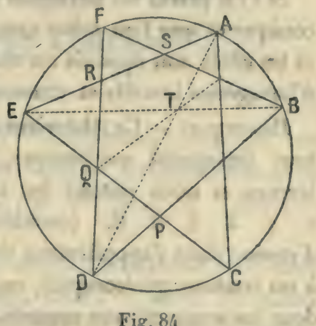


Fig. 84

Considérons maintenant l'hexagone DBMAEQD, d'après ce qui précède les diagonales opposées de cet hexagone EB, AD, MQ sont concourantes, donc d'après le réciproque du théorème de Brianchon l'hexagone MNPQRS qui est le même que celui ci-dessus est circonscrit à une conique.

Théorème IV. — Si l'on prolonge deux à deux les côtés non opposés d'un hexagone circonscrit à une conique, on obtient 6 points formant un hexagone inscrit.

Soit l'hexagone circonscrit à une conique MNPQRS en prolongeant les côtés non opposés de cet hexagone nous obtenons l'hexagone ABCDEF.

Si nous considérons le contour hexagonal DBMAEQD, ce contour étant par hypothèse circonscrit à une conique, les diagonales opposées EB, AD, MQ sont concourantes donc les 3 points MTQ sont en ligne droite.

Ces trois points étant précisément les 3 points de rencontre de côtés opposés du contour hexagonal CEBFDAC, il en résulte d'après la réciproque du théorème de Pascal que les 6 points ABCDEF sont sur une même conique.

[1] Les lettres M et N manquent sur la figure.

CONCLUSION

—

Si l'on prend un hexagone soit inscrit soit circonscrit dans une conique et que l'on mène successivement les diagonales non opposées et les côtés non opposés on obtient une série indéfinie et alternée d'hexagones inscrits et circonscrits.

Remarque. — Ces théorèmes s'appliquent évidemment à un contour hexagonal quelconque, inscrit ou circonscrit. En d'autres termes, si nous notons les sommets d'un contour par les chiffres 1 2 3 4 5 6, (notation usitée lorsqu'on ne veut pas faire d'erreur dans l'appplication des théorèmes de Pascal et de Brianchon à un contour quelconque), on entend par droites joignant deux à deux les sommets non opposés, les 6 droites

13
24
35
46
51
62

et par intersections des côtés non opposés les 6 points d'intersection respectifs des droites

12 — 34
23 — 45
34 — 56
45 — 16
56 — 12
61 — 23

NOTES DIVERSES

Par **M. A. Aubry**

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE

Figures et noms des chiffres. — En sanscrit, *ekas*, un, veut dire *seul* ; les traductions de ce mot dans les langues indo-européennes, signifient *retranché* (voir, par exemple, le *Cosmos* du 21 avril 1906.)

La racine sanscrite de *deux* signifie couper ; — celle de *trois*, intercaler ; cf. τραω, trans, durch, trough, trou ; — celle de *quatre*, répartir en groupes de deux ; — celle de *cinq*, étendre (la main) : — celle de *neuf* est nava, νεος, novus. L'origine des mots *six, sept, huit*, est inconnue. On a cependant prétendu qu'ils désignent les initiales de certains mots symbolisant ces mêmes nombres.

On peut voir ci-dessous la parenté de ces mots dans divers idiômes indo-européens.

	sanscrit,	grec,	latin,	celtique,	allemand,	anglais,	russe,	polonais.
1,	ekas,	eis,	unus,	aon,	eins,	one,	odin,	ieden,
2,	dvia,	duo,	duo,	da,	zwei,	two,	dva,	dwa,
3,	tri,	treis,	tres,	tri,	drei,	three,	tri,	trzy,
4,	katur,	tetra,	quatuor,	pedvar,	vier,	four,	tchétyré,	cztery,
5,	panka,	pente,	quinque,	pump,	fünf,	five,	piat'(1),	pienc',
6,	chach,	ex,	sex,	chwech,	sechs,	six,	chest',	szesc',
7,	saptam,	epta,	septem,	seith,	sieben,	seven,	sem',	siedm,
8,	ochtan,	octo,	octo,	nyth,	acht,	eight,	osm',	osm
9,	navam,	ennea,	novem,	nau,	neun,	nine,	deviat,	dziewienc',
10,	dacam,	deka,	decem,	deg,	zehn,	ten,	desiat,	dziesienc',
100,	catan,	ekaton,	centum,	cant,	hundert(2),	hundred,	sto,	sto.

(1) On indique par là un *i* à peine sensible.

(2) On a fait venir ce mot de l'allemand *Hand*, main.

Boèce attribue aux neuf chiffres (apices) les noms de *igin* (γυνὴ), *andras* (ἀνδρ), *ormis* (ὁρμή) (1), *arbas* (2), *quimas* (3), *chalcus* (4), *zenis* (5), *temenias* ou *zementis* (6) et *celentis* (7).

Il serait peu utile de donner les diverses figures données successivement aux chiffres. Il suffira de ce qui suit, en renvoyant, pour plus de détails, aux ouvrages traitant de l'histoire des mathématiques et aux revues orientales et archéologiques auxquelles ils se réfèrent.

Chiffres indiens

Apices de Boèce

Chiffres arabes ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

Fig. 1

Chez les peuples préhistoriques, les chiffres n'étaient que des barres ou des points groupés par un, deux, trois, quatre et cinq; après quoi, on continuait de même en marquant par un signe le premier groupe de cinq. Les Egyptiens firent une science de ce rudiment de numération et imaginèrent des symboles, dont on verra plus loin un échantillon, pour faciliter leurs comptes commerciaux ainsi que leurs spéculations arithmétiques.

Les Phéniciens, les Juifs et les Grecs se servaient des lettres de leur alphabet comme signes numériques. Les Romains utilisaient certaines lettres ressemblant aux chiffres étrusques. Les chiffres dits *arabes* paraissent une corruption de signes indiens, qui par des simplifications successives, sont devenus nos chiffres actuels.

(1) Le *un* serait ainsi la mère et le *deux* le père de tous les nombres, *trois* leur premier-né. Le *trois* de Boèce et le *trois* actuel ne sont autres que la réunion du *un* et du *deux* (Vincent, *J. de Liouville*, 1839.)

(2), (3), (4), (5) Mots d'origine hébraïque.

(6) De χαλκοῦς, à cause de sa forme rappelant une boite de poids.

(7) Origine inconnue, à moins d'accepter θήλυντος, avec Vincent. On a d'ailleurs pu réunir une collection de plus de trois cents noms ou attributs donnés aux dix premiers nombres par les Anciens.

Quelques grands nombres. — Le nombre 2^{64} a vingt chiffres. En général, 2^n a environ $\frac{1}{3}n$ chiffres.

Le nombre 30 ! en a trente-trois ; $(10^n)!$ en a environ $n\,10^n$.

Les plus petits nombres entiers satisfaisant à la relation $x^2 = y^2 + 1$ ont été calculés par Legendre : ils ont chacun trente chiffres.

La somme des dixièmes puissances des mille premiers entiers a été calculée par Jacques Bernoulli « intra semi-quadrantem horæ. » Elle a trente-deux chiffres. (1)

Le plus petit nombre ayant cent diviseurs a trente-un chiffres, et la 66e puissance de ce nombre multipliée par la quatrième d'un autre de neuf chiffres, donnerait le plus petit nombre ayant un million de diviseurs (Fermat.)

Pour soixante valeurs de n inférieures à 1 000, la période décimale résultant de la division de 1 par n est formée de $n - 1$ chiffres. Ainsi la période relative à $\frac{1}{983}$ a 982 chiffres (Gauss.)

Considérons la suite des nombres 2, 4, 16, 256,... dont chacun est le carré du précédent. Le vingt-cinquième a 5 050 446 chiffres (Euler).

Le produit des 100 000 premiers nombres a 456 572 chiffres (F. Thoman).

Le plus grand nombre qu'on peut écrire avec trois chiffres, lequel est 9^{9^9}, a 369 693 100 chiffres. Il aurait, écrit sur une seule ligne, plus de 924 kilomètres de longueur (id.)

On pourra, à titre d'exercice, essayer de se rendre compte de la croissance extrêmement rapide des termes de la série $2^2 = a$, $a^a = b$, $b^b = c$,...

(1) On est surpris de la facilité avec laquelles les anciens mathématiciens effectuaient les opérations les plus fastidieuses : Wallis raconte que « nocturnis tenebris » il calcula de tête avec vingt décimales la racine carrée de 3, et avec vingt-sept décimales, « eadem nocte », celle d'un nombre de cinquante-trois chiffres, qu'il s'était proposé au hasard.

Triangles rectangles en nombres entiers. — L'ensemble de trois entiers x, y, z, liés par la relation $x^2 + y^2 = z^2$, s'appelle un *triangle rectangle*, ou simplement un *triangle*; x et y en sont les *cathètes* et z l'*hypoténuse*. Le plus souvent, on suppose que x, y, z n'ont pas de facteurs communs : tel est le triangle 3, 4, 5, connu des anciens Egyptiens.

1° *L'une des cathètes est toujours un nombre pair* (Frénicle.)

Cor. I. *Tous les triangles sont donnés par les formules*

$$(1)\quad x = k\lambda^2 - k\mu^2,\quad y = 2k\lambda\mu,\quad z = k\lambda^2 + k\mu^2 \quad \text{(Euclide.)}$$

II. *L'hypoténuse est un multiple de 12 augmenté de 1 ou de 5* (anonyme arabe).

III. *Il y a toujours une des cathètes qui est multiple de 3 et une qui est multiple de 4, d'où il suit que la surface est toujours multiple de 6. De plus, l'un des côtés est multiple de 5; et en outre la somme ou la différence des deux cathètes est un multiple de 8 augmenté ou diminué de 1* (Frénicle.)

IV. *Trouver un triangle dont la première bissectrice* (correspondant au côté x) *soit rationnelle* (Diophante).

V. *Trouver un triangle dont le périmètre soit un carré* (Diophante.) Il donne la solution

$$(2)\quad x = (4\lambda^2 - \nu^2)\nu^2,\quad y = 4\lambda^2(\nu^2 - 2\lambda^2),\quad z = 4\lambda^2(2\lambda^2 - \nu^2) + \nu^4$$

Trouver trois carrés en progression arithmétique (Fibonacci.) La solution

$$(3)\quad (\lambda^2 - \mu^2 - 2\lambda\mu)^2,\quad (\lambda^2 + \mu^2)^2,\quad (\lambda^2 - \mu^2 + 2\lambda\mu)^2$$

paraît due aux Arabes.

Cor. I. *La raison de la progression est un multiple de 24* (id.)

II. *Résoudre le système* $x^2 + y = z^2$, $x^2 - y = w^2$ (id.) On trouve

$$(4)\quad \left| \begin{array}{ll} x = \lambda^2 + \mu^2, & y = 4\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2), \\ z = \lambda^2 - \mu^2 + 2\lambda\mu, & w = \lambda^2 - \mu^2 - 2\lambda\mu. \end{array} \right.$$

III. *Trouver un triangle dont la seconde bissectrice soit rationnelle* (Diophante).

IV. *Trouver trois triangulaires en progression arithmétique* (A. Boutin). Posant $2t_n = n(n+1)$, on a :

$$(5)\quad \left| \begin{array}{ll} 2t_n = t_p + t_q, & p = \lambda^2 - 2\mu^2 - 2\mu - 1, \\ q = \lambda^2 + 2\mu^2 - 4\lambda\mu - 2\lambda + 2\mu, & n = \lambda^2 - 2\lambda\mu + 2\mu^2 - \lambda + 2\mu. \end{array} \right.$$

2° *L'aire d'un triangle ne peut être un carré* (Fermat.)

3° *Trouver un triangle ayant même hypoténuse qu'un triangle donné* (Diophante.) La relation de Fibonacci

$$(6)\qquad (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\alpha \pm b\beta)^2 + (a\beta \mp \alpha b)^2$$

résout immédiatement la question.

Rem. I. La relation précédente a été généralisée de plusieurs manières :

$$(7)\quad (a^2 + kb^2)(\alpha^2 + k\beta^2) = (a\alpha \pm kb\beta)^2 + k(a\beta \mp \alpha b)^2 \quad \text{(Euler)}$$

$$(8)\quad \left| \begin{array}{l} (a^2 + kab + lb^2)(\alpha^2 + k\alpha\beta + l\beta^2) = A^2 + kAB + lB^2 \\ A = a\alpha - l\beta b, \quad B = a\beta + b\alpha + kb\beta \qquad \text{(Lagrange)} \end{array} \right.$$

$$(9)\quad \left| \begin{array}{l} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 \\ \quad + (a\beta - b\alpha - c\delta + d\gamma)^2 + (a\gamma + b\delta - c\alpha - d\beta)^2 \\ \quad + (a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha)^2 \qquad \text{(Euler)} \end{array} \right.$$

$$(10)\quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2bc)^2 \quad \text{(Euler)}$$

$$(11)\quad \left| \begin{array}{l} (a^2 + b^2 + \ldots + c^2)^2 = (a^2 + b^2 + \ldots - c^2)^2 + (2ac)^2 \\ \quad + (2bc)^2 + \ldots \qquad \text{(Catalan)} \end{array} \right.$$

$$(12)\quad \left| \begin{array}{l} (a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 \\ \quad + (a\beta - \alpha b)^2 + (b\gamma - c\beta)^2 + (ca - \gamma a)^2 \qquad \text{(Lagrange)} \end{array} \right.$$

II. *Trouver une somme de trois carrés égale à une somme de trois carrés donnés.* Solution de M. de Rocquigny. On fait $k = l^2 \pm m^2$

dans l'équation $x^2 + ky^2 = z^2 + kw^2$ tirée de (7). Voici d'autres solutions :

$$(13)\quad \begin{aligned} &4(c + b - 2a)^2 + 4(c + a - 2b)^2 + (c - 2a - 2b)^2 \\ &\quad = (3a)^2 + (3b)^2 + (3c)^2 \end{aligned} \qquad \text{(Euler)}$$

$$(14)\quad \begin{aligned} &a^2 + (a + 5b)^2 + (a + 7b)^2 = (a + b)^2 + (a + 3b)^2 \\ &\quad + (a + 8b)^2 \end{aligned} \qquad \text{(Proth)}$$

$$(15)\quad \begin{aligned} &(a + 2b)^2 + (a + 3b)^2 + (a + 7b)^2 = (a + b)^2 \\ &\quad + (a + 5b)^2 + (a + 6b)^2 \end{aligned} \qquad \text{(Proth)}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} &(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 + 4(ac - bd)^2 + 4(ab + cd)^2 \\ &\quad = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4(ad + bc)^2 \\ &\quad + 4(ab - cd)^2 \end{aligned} \qquad \text{(B. af Gennäs)}$$

III. *Trouver un carré égal à la somme de trois autres*, Solutions diverses :

$$(17)\quad (a^2 + 2b^2)^2 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 \qquad \text{(Diophante)}$$

$$(18)\quad (a^2 + a + 1)^2 = a^2 + (a + 1)^2 + (a^2 + a)^2 \qquad \text{(id.)}$$

$$(19)\quad \begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2 = (a + c)^2 (a + b)^2 \\ &\quad + (b + c)^2 (a + b)^2 + (c^2 + ac + bc - ab)^2 \end{aligned} \qquad \text{(Catalan)}$$

$$(20)\quad \begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\ &\quad + 4(ad + bc)^2 + 4(ac - bd)^2 \end{aligned} \qquad \text{(Ed. Luces)}$$

$$(21)\quad \begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2 = (b - c)^2 (c - a)^2 \\ &\quad + (c - a)^2 (c - b)^2 + (a - b)^2 (b - c)^2 \end{aligned} \qquad \text{(J. Neuberg)}$$

4° *Trouver trois triangles dont les aires soient égales* (Diophante). Il trouve les trois triangles 40, 42, 58 ; 24, 70, 74 ; 15, 112, 113. Fermat annonce qu'il y a une infinité de triangles dans ce cas.

5° *Déterminer un parallélipipède rectangle dont les trois diagonales superficielles soient rationnelles* (Euler).

6° *Le plus petit triangle dont l'hypothénuse est un carré ainsi que la somme de ses deux cathètes est le triangle* 4 565 486 027 761 et 106 165 229 352 (Fermat.)

7° *Trouver les triangles dont la différence des cathètes est égale à* 7 (Ozanam). Il trouve les triangles 5, 12, 13; 8, 15, 17; 21, 28, 35; 140, 147, 203; 297, 304, 425; 396, 403, 565; 833, 840, 1 183; 4872, 4879, 6895; 28413, 28420, 40187; 117110, 117117, 18717; 5 626 320, 5 626 327, 11 252 647;...

8° *Trouver les triangles dont les hauteurs sont des carrés* (id.) Solutions 9, 40, 41 : 25, 312, 313 : 49, 1 200, 1 201; 81, 3 280, 3 281 : 121, 7320, 7 321 ; 169, 14 280, 14 281; 225, 25 312, 25 313; 289, 41 760, 41 761; 361, 65 160, 65 161; 441, 97 240, 97 241; 529, 139 920, 139 921; 625, 195 312, 195 313;... (id.)

9° *Trouver trois triangles dont les aires forment un quatrième triangle* (Fermat.)

10° *Trouver le plus petit nombre qui soit n fois hypoténuse et non davantage* (Frénicle.)

11° *Combien de triangles ont-ils un nombre donné comme hypoténuse?* (id.)

13° *Trouver* n *triangles ayant même surface* (id.)

Figurations arithmétiques. — Les Anciens ont été amenés à l'étude des propriétés des nombres par la considération de divers groupements d'objets, dont les suivants, qui leur ont donné ces théorèmes :

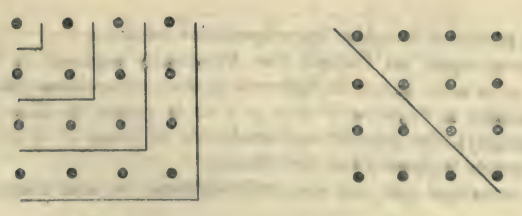


Fig. 2 Fig. 3

L'addition des nombres impairs donne les carrés (fig. 2) [1]

La somme de deux triangulaires successifs est un carré (fig. 3) [2].

Ils connaissaient les nombres figurés, mais leur usage dans la théorie des combinaisons et du développement de l'expression $(a+b)^n$ n'a été connu que beaucoup plus tard. La sommation des n premiers carrés est due à Archimède ; sa démonstration s'appuie sur la considération de droites coupées arithmétiquement (fig. 6), et sa formule parlée revient à

$$3(\alpha^2+\beta^2+\ldots+\theta^2) = n\alpha^2+\alpha^2+\theta(\alpha+\beta+\ldots+\theta)$$

(1) Ed. Lucas (N. A. 1870) a étendu ce mode de sommation aux fig. 4 et 5, ce qui lui a fourni les développements de S_2 et de S_3. Appliquant la même méthode aux carrés et aux cubes des nombres de la fig. 4, il est arrivé aux formules suivantes, dont la seconde avait déjà été trouvée par Jacobi,

$$S_3 + 2S_5 = 3(S_2)^2, \qquad S_7 + S_5 = 2(S_3)^2.$$

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

Fig 4

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

Fig. 5

(2) On prouvera de même les propositions suivantes :

Tout carré impair est l'octuple d'un triangulaire augmenté de l'unité (Plutarque), *et en même temps, la différence de deux triangulaires* (Marchand).

Tout nombre de la forme $n^2 \pm n + 1$ est la somme de deux triangulaires (de Rocquigny). En général *tout nombre de la forme a^2+ab+b^2 est en même temps de la forme f^2+3g^2* (Euler).

Tait a remarqué que *tout cube est la différence de deux triangulaires consécutifs.*

C'est vers la fin du premier siècle, qu'on voit pour la première fois les formules $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = n^2$ et $S_3 = (S_1)^2$ (1),

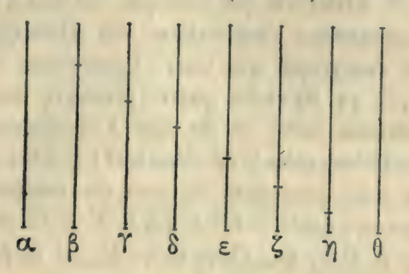


Fig. 6

que firent connaître Nicomaque et Epaphroditus. Cette dernière se

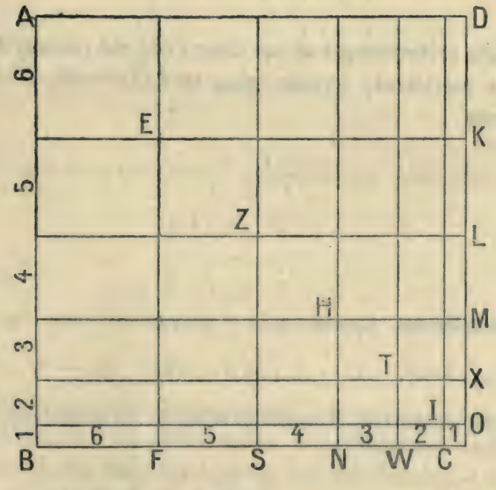


Fig. 7

(1) *On peut obtenir une puissance quelconque par la sommation de certains impairs consécutifs* (des Ourmes, *Encycl. méth.*) Les exemples suivants de M. Mansion, tiennent lieu de démonstration :

$$25 + 27 + 29 = 3.27 = 3^4, \qquad 61 + 63 + 65 + 67 = 4.64 = 4^4.$$

trouve démontrée dans le *Fakri* d'Al-Karki, et revient à faire voir que dans la fig. 7, qui n'est autre qu'une table de multiplication, le *gnomon* des 6, ADKEFB, par exemple, est égal à 6^3.

A cette démonstration géométrique, Ibn Almadjdi a substitué la démonstration analytique que voici : considérons les quatre premiers cubes 1, 8, 27, 64 et les quatre premiers triangulaires 1, 3, 6, 10; le quatrième carré 16 est égal à la somme $6 + 10$ ou à $2.6 + 4$. Le quatrième cube 4^3 est donc égal à $4(2.6+4) = 2.4.6 + 4^2$; donc ce même cube, augmenté du carré du troisième triangulaire, donne une somme égale à $6^2 + 2.4.6 + 4^2 = (6 + 4)^2 = 10^2$. De même $3^3 + 3^2 = 6^2$, $2^3 + 1^2 = 3^2$, $1^3 + 0^2 = 1^2$, et par suite

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 \text{ (1)}$$

Le triangle arithmétique et ses usages ont été connus des Orientaux. Ils le mettaient, comme plus tard Tartaglia et A. Girard, sous la forme

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ . & & . & & . & & . \end{array}$$

(1) Plus simplement. Appelant t_n le n^e triangulaire, on a (fig. 3)

$$t_n + t_{n-1} = n^2, \quad t_n - t_{n-1} = n \quad \text{d'où} \quad t^2_n - t^2_{n-1} = n^3.$$

Les tableaux suivants de Wheatstone et de M. de Rocquigny,

$$\begin{array}{lr} 1 & 1 + 3 = 4.1^3 \\ 3 + 5 & 5 + 7 + 9 + 11 = 4.2^3 \\ 7 + 9 + 11 & 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 4.3^3 \\ 13 + 15 + 17 + 19 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

donnent également d'autres solutions faciles à restituer.

On le voit imprimé pour la première fois dans l'*Arith. int.* de Stifel (Nürnberg, 1544) qui l'écrit ainsi

1				
2				
3	3			
4	6			
5	10	10		
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
17	136	680	2380	...

Briggs (*Trig. brit.* Goude, 1633) l'appelle ABACUS ΠΑΓΧΡΗΣΤΟΣ et lui donne la forme ci-dessous :

1	...	1	1	1	1	1
13	...	6	5	4	3	2
91	...	21	15	10	6	3
455	...	56	35	20	10	4
.	.	.	.	.	.	.

Pascal l'a mis sous une forme générale, qui peut être présentée ainsi :

a	b	c	d	e
f	g	h	i	
k	l	m		
n	o			
p				

avec cette loi, que *chaque terme est égal à la somme de celui qui est à sa gauche et de celui qui est au-dessus*. Il a démontré tout ce qu'on savait jusque-là des nombres figurés, des combinaisons et du développement du binome.

Si, dans ce triangle, on fait $b = c = d = \ldots = -1$ et $f = k = n = \ldots = 1$, on obtiendra le *triangle de Delannoy*, donnant les coefficients du développement de $(1 - x)(1 + x)^n$. (Ed. Lucas, *Th. des n.*)

Le triangle arithmétique peut être continué en remontant, et on a ainsi les coefficients de $(1 - x)^{-n}$ (Laisant, A. F. 1891).

La somme des carrés des termes d'une hypoténuse est égale à la somme des termes, compris dans le carré inscrit dont un sommet s'appuie au milieu de l'hypoténuse (Desboves, *Quest. d'Alg.*)

Cauchy (*Rés. anal.*, Turin, 1833) l'écrit ainsi :

1	y	y^2	y^3	y^4	y^5
x	$2xy$	$3xy^2$	$4xy^3$	$5xy^4$	
x^2	$3x^2y$	$6x^2y^2$	$10x^2y^3$		
x^3	$4x^3y$	$10x^3y^2$			
x^4	$5x^4y$				
x^5					

sommant par lignes, on a :

$$\frac{1}{1-y} + \frac{x}{(1-y)^2} + \frac{x^2}{(1-y)^3} + \ldots$$

et sommant suivant les hypoténuses,

$$1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3 + \ldots$$

Si on égale, dans ces deux résultats, les coefficients de y, de y^2, de y^3,... on trouvera les développements de $(1-x)^{-1}$, $(1-x)^{-2}$,...

Ecrivant le triangle arithmétique comme Leibniz et Jacques Bernoulli,

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
.	.	.	.	.	.

les sommes des termes situés sur des parallèles à la bissectrice de

l'angle droit sont les termes de la série bien connue de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... (Ed. Lucas).

Leibniz s'est occupé à diverses reprises du *triangle harmonique*, formé des inverses des nombres figurés

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & & & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{5} & & & & \\
\frac{1}{1} & & & & &
\end{array}
$$

A des facteurs constants près, chaque terme est la différence de son voisin de gauche et de celui qui est au-dessus : de là, la sommation des inverses des nombres figurés.

Tétraèdre arithmétique de M. Laisant (S. M. t. XIX et A. F. 1891). Multiplions respectivement par

$$C_{n,0} = 1,\ C_{n,1} = n, \ldots\ C_{n,n} = 1$$

les termes des triangles arithmétiques successifs 1 ; 1, 1 ; 1, 2, 1 ; 1, 3, 3, 1 ; on aura, par ordre, les coefficients du développement de $(a + b + c)^n$. De même, attribuons, aux boulets d'une pile triangulaire, des valeurs qui soient, par tranches, celles qu'indiquent les figures ci-dessous :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 3 & 3 \quad 1 \quad \text{etc.}
\end{array}
$$

Chaque terme est égal à la somme de ceux qui sont au-dessus de lui et le touchent. La somme de ces nombres est égale à 3^n. Opérant comme sur le triangle arithmétique, on obtiendra les coefficients du développement de $(a + b + c + d)^n$. Les mêmes nombres, disposés suivant un trièdre tri-rectangle, obéissent à la loi suivante :

$$u_{p+q+r} = u_{p-1,q,r} + u_{p,q-1,r} + u_{p,q,r-1} \text{ (1)}$$

Les sections du trièdre arithmétique, perpendiculairement à sa pseudo-bissectrice, sont :

1	1	1	1	1	1						
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5		
1	4	1	3	6	3	6	12	6	10	20	20
1	3	3	1	4	12	12	4	10	30	30	10
1	4	6	4	1	5	20	30	20	5		
1	5	10	10	5	1						

et perpendiculairement à une face,

1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	1	3	6	10	1	4	10	1	5	1
1	2	3	5	5		2	6	12	20		3	12	30		4	20		5		
1	3	6	10			3	12	30			6	30			10					
1	4	10				4	20				10									
1	5					5														
1																				

Dans son traité *De seriebus infinitis* (Bâle 1689), Jacques Bernoulli est arrivé à sommer diverses séries par une méthode analogue

(1) On arrive immédiatement à cette conclusion en cherchant le nombre de parcours du sommet à une intersection quelconque d'un quadrillage tétraédral, comme on le fera plus loin, pour un quadrillage plan.

En général, on a : $u_{p,q,r,s,\ldots} = u_{p-1,q,r,s,\ldots} + \ldots$ pour les coefficients de $(a + b + \ldots)^n$.

à celle de Leibniz. Soit $-1 < x < 1$, et sommant par lignes puis par colonnes la série double

$$\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \quad + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \qquad + x^2 + x^3 + \dots \\ \qquad\quad + x^3 + \dots \\ \qquad\qquad + \dots \end{array}$$

il vient

$$(1) \quad 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

De même, de la suivante

$$\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \quad + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots \\ \qquad + 3x^2 + 3x^3 + \dots \\ \qquad\quad + 4x^3 + \dots \\ \qquad\qquad + \dots \end{array}$$

on déduit

$$(2) \quad 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots = \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

Les coefficients du premier membre sont les nombres triangulaires. Agissant de même sur (2), on obtiendra le développement de $(1-x)^{-4}$, et ainsi de suite.

Du double de (2) retranchons (1), il viendra

$$(3) \qquad 1 + 4x^2 + 9x^3 + \dots = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Or le premier membre peut s'écrire

$$\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + \dots \\ \quad + 3x + 3x^2 + \dots \\ \qquad + 5x^2 + \dots \\ \qquad\quad + \dots \end{array}$$

Sommant par lignes, on en déduira la sommation de

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$$

Par des moyens semblables, on sommerait

$$1 + 8x + 27x^3 + \ldots$$

Euler (*Novi Com.* t. IX, 1767), donne ce tableau

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 + x + x^2 \\
1 + 2x + 3x^2 + 2x^2 + x^4 \\
1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6 \\
1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

des développements des diverses puissances de $(1 + x + x^2)^n$, et se propose de déterminer l'expression du coefficient moyen. Or il est évidemment celui de x^n, et en mettant le développement sous la forme

$$x^n(1 + x)^n + C_{n,1}x^{n-1}(1 + x)^{n-1} + \ldots$$

on trouve cette formule

$$1 + C_{n,1}C_{n-1,1} + C_{n,2}C_{n-2,2} + \ldots$$

qui, pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$ donne les valeurs 1, 1, 3, 7, 19, 51, 241, 393, 1 107, 3 139, 8 953, 25 653, 73 789,...

Ed. Lucas, qui a retrouvé cette formule, remarque que *chaque coefficient est égal à la somme de celui qui se trouve au-dessus et de ceux qui sont à droite et à gauche de celui-ci* (*Th. des n.*)

On pourra s'exercer sur les tableaux suivants de M. de Rocquigny et de Césaro (M. 1883)

1,	1,	1,
2, 3, 4,	3, 5, 7,	3, 5, 7, 9,
5, 6, 7, 8, 9,	9, 11, 13, 15, 17,	11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,
. . . . .	. . . . .	. . . .

et sur le suivant, qui paraît inédit,

1 ;
1, 1 ;
1, 2, 2, 1 ;
1, 3, 5, 6, 3, 1 ;
1, 4, 9, 15, 20, 22, 20, 15, 9, 4, 1 ;
1, 5, 14, 29, 49, 71, 90, 101, 101, 90, 71, 49, 29, 14, 5, 1 ;
. . . .

les termes étant formés, de rangée en rangée, au moyen de la relation

$$u_{n+1,k} = u_{n,k} + u_{n,k-1} + u_{n,k-2} + \dots + u_{n,k-n-1}$$

et donnant les coefficients des développements successifs du produit

$$(1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)\dots$$

Les nombres figurés du quatrième ordre peuvent se représenter par le nombre maximum des points d'intersection des droites joignant n points d'un plan, car ce nombre est égal à $3C_{n,4}$ (Steiner). De plus, les intersections comprises dans l'intérieur du polygone convexe formé par ces n points sont au nombre de $C_{n,4}$ (Lionnet).

Des considérations géométriques très simples donnent souvent naissance à des questions très difficiles : on peut s'en assurer en cherchant, par exemple, combien on peut construire de tétraèdres différents avec six droites égales ou avec six triangles équilatéraux égaux (Ferriot) ; combien de cubes, avec douze droites égales ou six carrés égaux (Mac Mahon) ; de combien de manières un polygone peut être décomposé en triangles (Euler).

Dans les N. A. de 1866, Dupain trouve qu'il y a $C_{2n,n}$ parcours du sommet d'un carré au sommet opposé, ce carré étant partagé en n^2 cases et les parcours se faisant suivant les lignes de la figure et toujours de droite à gauche ou de bas en haut.

Ed. Lucas a étendu cette théorie à un quadrillage rectangulaire

quelconque, ce qui permet de représenter géométriquement $C_{m,n}$ en général ; il examine également les parcours d'un pentagone avec ses diagonales, d'un octaèdre, de l'ensemble des méridiens d'une sphère, d'un chemin de fer de ceinture à n voies se réunissant en p stations, etc. Il résout graphiquement un grand nombre de problèmes de combinaisons, en les représentant comme la fig. 8, qui figure la permutation *badec* ; par exemple *trouver le nombre de permutations symétriques par rapport au centre, ou par rapport à une diagonale, ou qui coïncident quand on fait tourner le carré de 90° autour de son centre.*

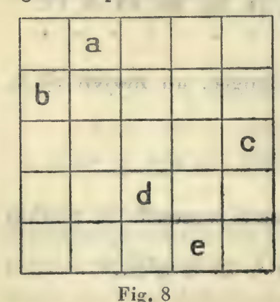


Fig. 8

M. Laisant (A. F. 1893) a donné plusieurs figurations intéressantes, dont celle des permutations. Il les représente par le nombre de trajets qui mènent du point A_0 aux points A_1, A_2, A_3,... ; les points A_0, A_1 étant joints par une ligne, les points A_1, A_2 par deux lignes, les points A_2, A_3, par trois ; etc.

Histoire des notations algébriques. — Bien que les notations ne constituent pas l'Algèbre, leur perfectionnement était tellement indispensable au progrès de l'analyse qu'il a marché avec ceux-ci à peu près parallèlement. A mesure qu'augmentait la difficulté des recherches, on éprouvait en effet le besoin de simplifier le langage et l'écriture, en remplaçant les longues périphrases qui revenaient fréquemment, par des abréviations conventionnelles. Les signes algébriques sont de deux sortes : les uns représentent les quantités sur lesquelles on raisonne, les autres indiquent les opérations qu'elles ont à subir.

Les problèmes que contient le manuel d'Aahmes, reproduit dans le célèbre papyrus Rhind (voir Eisenlohr, *Ein math. Handb. der ält. Ägypt.*, Leipzig, 1877 ; Cantor, *Gesch. der Math.* Leipzig, 1894 ; et un article de L. Rodet du *Journal asiatique*, année 1882), sont-ils ou ne sont-ils pas résolus algébriquement ? Toujours est-il que ce

travail témoigne d'une science déjà ancienne et très avancée, ainsi que l'instinct de la nécessité de créer une langue et une écriture algébriques. Ainsi l'un de ces problèmes, qu'on énoncerait aujourd'hui en demandant de résoudre l'équation $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + x = 0$, se représente comme l'indique la fig. ci-dessous [1] :
et se traduit ainsi : *un tas* (d'objets) : *sa moitié, son quart et lui-même font* 10. L'inconnue (*tas*) se note aussi en hiéroglyphes. Les quantités additives sont simplement juxtaposées ; les quantités négatives, désignées par trois flèches ; l'égalité par un signe ressemblant à notre $\leqslant$ (*ensemble*) ; on trouve aussi, pour + et —, les hiéroglyphes de la figure 11, qui signifient *venant* et *partant*.

Fig. 9

Fig. 10

Fig. 11

Les Grecs ont créé virtuellement sinon l'algèbre, du moins l'art des transformations algébriques. Il leur a manqué, pour compléter leur découverte, et en faire une science spéciale, d'avoir des signes numériques indépendant de leur alphabet. Cependant Aristote emploie des lettres pour désigner les quantités indéterminées ; mais le plus souvent ils raisonnent sur des quantités figurées par des droites, et tous les calculs sont exposés en langage vulgaire, ce qui

(1) Rappelons ici les notations numériques égyptiennes :

Chiffres hiéroglyphiques									
Chiffres hiératiques									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Chiffres hiéroglyphiques								
Chiffres hiératiques								
	10	20	30	100	200	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Fig. 12

Les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ont des signes spéciaux. Les autres s'indiquent par un point ou un ovale. On voit bien plus tard, Héron noter d'une manière particulière les fractions $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ et $\frac{7}{8}$.

en rend la lecture extrêmement pénible (1) et a permis de supposer qu'ils avaient trouvé leurs théorèmes par une analyse que chacun s'était créée et qu'ils les avaient ensuite exposés dans la forme sévère que nous leur connaissons.

Diophante, qui écrivit le premier spécialement sur l'algèbre, fut ainsi amené à lui donner ses premières notations. Il appelle généralement l'inconnue ἀριθμός ; il la désigne, ainsi que ses puissances successives, par les abréviations ς, $\delta^{\tilde{\upsilon}}$, $\kappa^{\tilde{\upsilon}}$, $\delta\delta^{\tilde{\upsilon}}$, $\delta\kappa^{\tilde{\upsilon}}$, $\kappa\kappa^{\tilde{\upsilon}}$, des mots ἀριθμός (2), δύναμις (3), κύϐος, δυναμοδύναμις, δυναμόκυϐος, κυϐόκυϐος ; l'unité s'indique $\mu^{\tilde{o}}$ (μονας) ; les coefficients se placent à droite de l'inconnue ; les termes additifs sont juxtaposés, les termes négatifs précédés de la sigle du mot λεῖψις ; le signe de l'égalité est le mot ισοι ou son initiale.

Les Indiens, — à la différence des Grecs, pour qui l'Algèbre n'était guère qu'une auxiliaire de la Géométrie, — s'adonnèrent spécialement à la première de ces sciences. Aryabhatta (vers 400), et Brahmegupta (vers 630), donnent des formules parlées, assez compliquées et assez générales pour qu'on puisse croire qu'ils possédaient des notations utilisées seulement dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, Baksali (vers 800) indique l'inconnue par un point et, — dans les calculs numériques, — l'égalité, l'addition, la soustraction et la division par les initiales des mots correspon-

(1) Dans leur admiration pour les Anciens, Newton et Huygens ont écrit leurs principaux ouvrages dans la forme adoptée par eux. Euler a dit n'avoir compris certains passages des *Philos. nat. princ.* qu'après les avoir traduits en langage algébrique.

(2) Ou peut-être de σωρός.

(3) Nom du carré en algèbre. C'est de là qu'est venue l'expression *puissance*.

On sait que pour économiser la place et le travail, les copistes de manuscrits mettaient beaucoup d'abréviations indiquées le plus souvent par des traits placés au-dessus.

Les manuscrits présentent d'ailleurs de nombreuses variantes, du fait des copistes.

dants placés à la suite des nombres sur lesquels il opère, et qui sont seulement mis ensemble dans un même rectangle ; pour la multiplication, il n'y a aucun signe, comme nous faisons aujourd'hui. — Baskara (vers 1150) a fait connaître une notation algébrique assez étudiée, dont il ne paraît pas l'inventeur : il écrit les deux membres d'une équation l'un au-dessous de l'autre, en mettant zéro pour coefficients des termes manquants ; les coefficients sont à droite et surmontés d'un point s'ils sont négatifs. L'inconnue, son carré, son cube, son bicarré,..., un produit, un radical, sont

य य रू   या व घ भ क   का नी पी लो श्वे

Fig. 13   Fig. 14   Fig. 15

désignés par les sigles des mots correspondants, nombre, nombre-carré, nombre-cube, nombre-carré-carré, produit, indicible. S'il y a d'autres inconnues, elles se représentent par les syllabes initiales des mots *kâlaka* (noir), *nîlaka* (bleu), *pîtaka* (jaune), *lôhitaka* (rouge), *svêtaka* (blanc). Il sépare, par des barres verticales, les quatre termes d'une proportion. A cette même époque, Ibn-Esra représente ainsi la proportion $7 : x = 19 : 13$. il ne paraît pas l'inventeur de cette notation : on voit du reste qu'il représente l'inconnue par une sorte de zéro (*galgal*, roue) (¹).

ט		ז
יט		יג

Fig 16

Les Arabes cultivèrent l'algèbre avec grand succès. Ils appelaient, d'après Al-Karizmi (vers 830), l'inconnue, la *chose* (cherchée) ou la *racine* (à extraire de l'énoncé, où elle est pour ainsi dire enfouie) ; son carré s'appelle *puissance* comme chez les Grecs. Bien qu'il y ait lieu de croire qu'ils employaient une certaine notation algébrique, on admet qu'elle n'a paru d'abord que dans les écrits d'Ibn Al-Banna (vers 1220) et qu'elle est telle que la donne Al-Kalçadi (vers 1480) : les proportions s'indiquent en séparant par trois points

(¹) Les traités de l'*Abacus*, du xᵉ siècle, désignaient également le petit cercle représentant le zéro par les mots *rota* ou *rotula*.

chaque terme de son voisin ; l'inconnue, son carré et son cube, l'égalité, une racine, par les initiales des mots correspondants

جذر ل كعب مال شى

Fig. 17

Fibonacci introduisit en Italie l'algèbre des Arabes en 1202, avec son célèbre *Liber Abaci*. Il appelle comme eux une constante *numerus*, l'inconnue *res* ou *radix*, et son carré *census*. Il met *et* ou *additus* et *demptus* ou *minus* pour $+$ et $-$. Il traite des proportions, en désignant les quantités, soit comme Euclide, par des droites, soit quelquefois par des lettres a, b, g, d,... ; il représente même la somme de a et de b par ab.

Il est remarquable qu'à la même époque, Jordanus employait les mêmes notations dans les démonstrations des théories arithmétiques et les solutions des problèmes algébriques, (*Algorithmus* et *De numeris datis*) ; ces notations servaient d'ailleurs uniquement à abréger le langage, et l'idée n'était pas encore venue d'en faire l'objet d'opérations semblables à celles qu'on effectuait sur les nombres ; autrement dit, la notion de formule, qui paraît si simple aujourd'hui, ne s'était pas encore fait jour.

Il va être, une dernière fois, question des Orientaux. Il a paru, chez les Chinois, aux environs de 1300, deux traités d'algèbre, où on voit de véritables équations écrites, en mettant les coefficients les uns au-dessous des autres, les positifs en rouge et les négatifs en noir. On trouve aussi des expressions algébriques figurées par leurs coefficients rayonnant autour du terme connu. Ces travaux ayant été sans influence sur le perfectionnement de la science, il n'est guère utile d'en parler davantage.

Un grand progrès est dû à Oresme (vers 1350), qui inventa les puissances fractionnaires et une notation générale des puissances. Il écrit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,... pour « una media, una tertia,... » ; 2^{la}, 3^{la},... pour

la « proportio dupla, tripla (¹),... »; $1.^p\frac{1}{2}$, $1.^p\frac{1}{3}$, $1.^p\frac{2}{3}$, $2.^p\frac{2}{3}$,... pour la « proportio sesquialtera, sesquitertia, superpartiens duas tertias,... » Les expressions $\sqrt[3]{4^4}$, $\sqrt{9\frac{13}{27}}$, $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$,... se notent chez lui $\frac{3}{4}\,4.^p$, $\frac{1}{2}\,9.^p\frac{13}{27}$, $\frac{1}{3}\,6.^p\frac{3}{4}$,... (*Algorismus proportionum.*) Cet opuscule, imprimé en 1868 seulement, fut cependant assez connu et eut une influence considérable sur la théorie des puissances, jusque-là très obscure.

Dans un manuscrit allemand, retrouvé récemment et paraissant dater de 1460, on voit l'inconnue et ses puissances 0, 1, 2, 3, 4, appellées *zall* (nombre), *dingk* (chose), *zensi*, *chubi*, *wurzell von wurzell* (racine de racine) et s'indiquer par les initiales gothiques

℞ von ℞

Fig. 18

l'addition, la soustraction se notent encore par les mots *vund*, (et), *minner* (moins) et *mal* (fois).

Nicolas Chuquet, dans son *Triparty* écrit en 1484, mais publié seulement en 1880, emploie pour *plus*, *moins* et *racine*, les abréviations $\tilde{p}$, $\tilde{m}$, ℞, qui paraissent dues aux Italiens. Ainsi il écrit ℞^{3}. 7. $\tilde{m}$. ℞^{2} 5, pour $\sqrt[3]{7-\sqrt{5}}$. Il a imaginé l'exposant zéro et la puissance négative ; il les note ainsi ; 7^0, $7^{1\tilde{m}}$. 12^3 est mis pour $12x^3$.

Les symboles + et — apparaissent, imprimés pour la première fois, dans le *Compendium arithmeticæ mercatorum*, d'Eger (Leipzig, 1489), qui les donne comme déjà connus. On pense qu'ils ne sont autres que des contractions ou des abréviations des mots *et* ou *plus* et *minus*, ou encore des signes commerciaux indiquant des excédants ou des déficits de poids.

(¹) On sait que les Anciens appelaient *proportion double, sesquialtère*,... les produits de rapports tels que $\frac{a}{b}\,\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$,...

Le premier traité imprimé sur l'algèbre se voit dans la *Summa Arithmetica*, de Pacioli (Venise, 1494). Il emploie les dénominations et les symboles suivants : *cosa* ou *res*, co. ou R̨ ; *censo*, ce. ; *cubo*, cu. ; *censo censo*, ce. ce. ; *censo de cubo*, ce. cu. ; R̨ ou R̨2, R̨3 ou R̨ cu. ; R̨ R̨ ou R̨4, pour les racines carrée, cubique et bicarrée ; *piu* ou p̃, *meno* ou m̃, pour plus et moins. La racine d'un polynome s'indique par les lettres RV (*radix vniversalis*).

Dans l'ouvrage de Rudolf, *die Coss* (Leipzig. 1525), on voit les signes √, √√, √√√ désigner les racines : ils provenaient d'une déformation de l'initiale du mot *radix*. Il emploie les signes représentés ci-dessous, en les combinant, de manière à représenter les neuf premières puissances de l'inconnue.

ß ʒ𝔠𝔢 𝔅ß ʒʒʒ 𝔠𝔢

Fig. 19

Recorde (*Grounde of artes*, Londres, 1540), indique l'égalité par le signe Ƶ, et dans *The Wehtstone of witte* (id. 1557), il donne le signe actuel =, qu'il trouve symboliser au mieux une égalité. On a avancé que ce dernier signe était usité avant lui et résultait d'une contraction du mot *est*. Adopté aussitôt par les Anglais, il ne le fut sur le continent, qu'après les écrits de Leibniz.

Stifel, dans sa célèbre *Arithmetica universalis* (Nürnberg, 1544), a vulgarisé les signes + et — et ceux de la fig. 18, qu'il a complétés comme Rudolf, pour les puissances supérieures à la quatrième :

Il représente les racines arithmétiques par les notations de Rudolf et par les symboles ci-contre.

ʑ ʑ̇ ʑ̈

Fig. 20

C'est Stifel qui a eu le premier l'idée de mettre tous les termes d'une équation dans un membre et zéro dans l'autre, idée dont d'ailleurs il n'a pas compris la portée.

Tartaglia et Cardan utilisèrent peu les nouvelles notations : ainsi le second écrit : « cubus et 6 positiones œquatur 20 » et « Rv : cu.

R 108 p : 10 m : Rv : cu. R 108 m : 10 » ce que nous écririons aujourd'hui

$$x^3 + 6x = 20 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\sqrt[3]{108} + 10} - \sqrt{\sqrt[3]{108} - 10}$$

Cependant Tartaglia emploie Φ pour plus, ainsi que ℞ ; et Cardan, les abréviations p̄, m̄, L, pour *plus*, *minus* et *radix ligata*, racine d'un polynome comme $2 + \sqrt{3}$. Les inconnues s'appelaient *posita, dignita, quantita, postposita, secunda posita*, etc., leur carré, *potenza*, etc. Nonius a imité Cardan dans ses notations.

Xylander a employé en 1575, dans son édition de Diophante, le signe || pour indiquer une égalité, d'après un manuscrit où ce signe était mis pour ἴσοι. Il a été imité par Clerselier (*Lettres de Descartes*) et Sluze (*Mesolabum*).

Bombelli (*l'Algebra*, Bologne, 1579), a imaginé un ensemble de notations assez complètes et assez expressives. L'inconnue, qu'il appelle *tanto* ou *quantito*, son carré, son cube, son bicarré, se représentent ainsi : $\smile\!\!\!\!1$, $\smile\!\!\!\!2$, $\smile\!\!\!\!3$, $\smile\!\!\!\!4$; à la place des signes $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, $+$, $-$, $\sqrt{-1}$, il met les suivants R. q., R. c., RRq., Rq. c., p., m., p. di m. ; il met, entre les deux signes L, ⅃ [1], les quantités auxquelles s'applique une même opération. Ainsi, pour indiquer l'expression $x^4 + x^2 + 9 = 8x^3$, il écrit « agguaglisi 1 $\underset{\smile}{4}$ p. 1 $\underset{\smile}{2}$ p. 9 à 8. $\underset{\smile}{3}$. »
L'expression

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352} + 16} - \sqrt[3]{\sqrt{4352} - 16}$$

s'écrit chez lui « R. c. LR. q. 4352 p. 16 ⅃m. R. c. LR. q. 4352. m. 16⅃ », au courant de la ligne.

Quelle que soit la valeur de ces abréviations, on comprendra le grand pas qui restait à faire, quand on essaiera de se rendre compte de l'expression « R. q. L di R. q. L R. c. L 4608. p. R. q. 445644

[1] *Radice quadrata* (ou *cubica*) *legata*.

⅃ p. R. c. L 4608. m. R. q. 4456448 ⅃ p. 16. ⅃ m. R. c. L R. q. 68. p. 2 ⅃ p. R. c. L R. q. 68. m. 2 ⅃⅃ », écrite à même le texte.

Stévin (*Arith.* Leyde, 1585), au lieu du signe souscrit de Bombelli, met dans un petit cercle (1) les chiffres 0, 1, 2, 3,..., $\frac{3}{2}$, pour désigner l'unité, l'inconnue et ses *potences* (puissances) carrée, cubique,..., sesquialtère. On voit qu'il réinvente les puissances fractionnaires, idée qui n'eut du reste aucune suite immédiate. Il met M et D pour *multiplier par* et *diviser par*. Il indique d'autres inconnues par les annotations *sec, ter*, etc.

Viète adopte les signes +, — et √ ; il met = pour *la différence de* (2) ; les quantités en facteur commun sont surmontées du *vinculum*, barre horizontale que Chuquet mettait au-dessous et encore souvent employée aujourd'hui. A l'exemple des premiers algébristes, il écrit le mot *in* entre deux quantités à multiplier (3). Mais il a surtout bien mérité de la science, en indiquant par des symboles, non seulement les inconnues, mais encore les données ; il désigne (*In Artem Analyticam isagoge*, Tours, 1591), les premières par les voyelles A, E, O, U, Y, et les connues par les consonnes B, G, D... Le carré, le cube,... de l'inconnue s'indiquent chez lui A quad. ou Aq., Ac., Aqq., Aqc.,... Plus tard, il a aussi écrit N (*numerus*), Q (*quadratus*) (4), C (*cubus*), QQ, QC,... Voici par exemple une équation traitée par lui : « B solido in A — G plano in A quad. — A quad. quad. œquetur Z plano-plano. » On sait que c'est à Viète qu'on doit l'algèbre littérale : Jordanus, Maurolicus et Nonius ef-

(1) Côtes a employé cette notation pour désigner les différences premières, secondes. Van Romen et Briggs l'ont employée dans le sens de Stévin.

(2) Viète a été imité en cela par Albert Girard et Schooten.

(3) *Ductus in* dans Jordanus, Oresme, Campanus, Regiomontanus, etc ; *multiplicato nella*, dans Tartaglia ; *multiplicados por*, dans Nonius.

(4) Viète désapprouve les nouvelles dénominations introduites par les Arabes, et dit *Analyse*, *numerus* ou *latus* et *quadratus*, pour algèbre, *res* et *census*.

fectuaient des calculs sur des lettres, mais les résultats successifs étaient à mesure affectés de nouveaux symboles, ce qui fait que le résultat définitif ne présentait plus aucune trace des données.

Dans son *Harmonice mundi* (Linz, 1619), Kepler expose, au sujet de l'étude des polygones réguliers, des équations, où $7x^5$, par exemple, est figuré par la notation 7^{v}. Bürgi employait déjà cette dernière : seulement l'indice de la puissance était placé au-dessus du coefficient.

Albert Girard (*Inv. nouv. en alg.* Amsterdam, 1629), écrit ff, § pour $>$ et $<$; $-\,-\,2$, (1), (2),... 1 (3) esgale à $-\,6\,(1) + 20$, pour $-\,(-\,2)$, x, x^2,... $x^3 = -\,6x + 20$; $\sqrt{}$ bin, $\sqrt{}5$, $\sqrt{}\sqrt{}$, $\left(\frac{3}{2}\right)49$, pour $\sqrt{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt{49^3}$; B (Bp + Cq³) pour B (B² + 3C²) ; $\sqrt{}(2 + \sqrt{}7)$ pour $\sqrt{2 + \sqrt{7}}$; AB pour A $\times$ B. On n'a gardé de toutes ces notations, que les parenthèses,

Harriot, dans son ouvrage posthume, *Arte analytica praxis* (Londres, 1631), remplace les grandes lettres de Viète par des lettres minuscules, et indique ainsi l'inconnue et ses puissances *a*, *aa*, *aaa*,... On lui doit les signes $>$ et $<$.

La même année, Oughtred publia. à Oxford, sa *Clavis Mathematica*, où il perfectionnait grandement le système des notations employées jusque-là. Il écrit 8.12 :: 18.27 pour *ut* 8 *ad* 12, *sit* 18 *ad* 27 ; il indique une progression géométrique en la faisant précéder du signe $\div$, il imagine les signes $\times$, $\pm$ et $\mp$; il représente les troisième, quatrième,... puissances par les nombres 3, 4,... placés dans un carré. C'est à lui qu'on doit l'idée de représenter par la lettre π le rapport de la circonférence au diamètre. Il donne un certain nombre d'autres signes dont certains pourraient être utilisés (1).

(1) Il écrit 0|56, pour 0,56. Viète soulignait simplement la partie décimale. Bürgi indiquait le chiffre des unités par un zéro placé au-dessus. C'est Neper qui a imaginé de séparer par un point, les décimales des unités.

Hérigone (*Cursus mathematicus*, Paris, 1634), met 2/2, 3/2, 2/3, pour $=$, $>$, $<$; $a2$, $a3$,... pour a^2, a^3,... ; $\angle$, ⊥, — et $=$, pour angle, perpendiculaire, droite et parallèle.

Descartes, en même temps qu'il rénovait l'algèbre, en lui don-

æquale = simile sim	medium sive mediale m
majus ⊏ proxime majus	major ejus portio
minus ⊐ proxime minus	minor ejus portio
non majus æquale vel minus	Z est A + E z est a + e
non minus æquale vel majus	X est A − E x est a − e
proportio ::	Z est Aq + Eq z est aq + eq
major ratio minor ratio	X est Aq − Eq x est aq − eq
continue proportionales	Æ est AE rectang. æ est a e rect.
commensurabilia	□ rectangulum □ quadratum
incommensurabilia	Δ triang. latus, sive radix
commensurabilia potentia	m media proportionalis
incommensurabilia potentia	∽ est differentia duarum magnitudinum
rationale R vel	B ∽ C significat vel B_C, vel C_B
irrationale	⌒ significat superficiem curvam

Fig. 21

nant son vrai caractère, la dotait de notations à peu près définitives. Dans sa *Géométrie* (Leyde, 1637), il représente les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet, z, y, x,..., et les données, par les premières a, b, c,... ; les puissances sont indiquées par des exposants, x, xx (¹), x^3, x^4,... ; les racines, par les signes $\sqrt{}$, $\sqrt{c}$. Les termes manquants, dans une équation, sont signalés par une astérisque. Le signe de l'égalité est ∝, abrégé de *æquare* (²), Il écrit ses

(¹) On a écrit, jusqu'au commencement du XIXᵉ siècle, xx au lieu de x^2, probablement pour ce motif que x^2 nécessite autant de caractères typographiques que xx. C'est l'avis de Gauss, qui du reste écrivait même a'''''' au lieu de a^{VI}.

(²) Schooten, Hudde, Huygens, Rolle, Jacques Bernoulli, Ozanam ont employé le même signe, Dans ses deux positions renversées, il était mis pour $\pm$ et $\mp$.

équations sur une ligne spéciale, usage qui n'a été établi que bien plus tard. Il indique plusieurs quantités en facteur commun en les mettant les unes au-dessus des autres et les séparant de leur facteur par une accolade; la multiplication de deux quantités littérales s'indique en les juxtaposant.

Fermat utilisa peu les symboles algébriques. Il écrit, par exemple, « lat. cub. (2 in A qu. — A cub.) — L. cub. (Ac + Bq. in A) œquari D », pour $\sqrt[3]{2A^2 - A^3} - \sqrt[3]{A^3 + B^2A} = D$.

Wallis (*Arithmetica infinitorum*, Oxford, 1655), donne le signe ∞. Dans son *De motu* (1669), il emploie *omn* pour Σ, ou si l'on veut, pour ∫. Dans le troisième volume de ses œuvres (1693), est publiée pour la première fois, la formule de Newton, pour le développement du binome, laquelle est exprimée ainsi :

$$\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc}\,(^1)$$

les lettres A, B, C, D,... désignent les coefficients précédant immédiatement. C'est là qu'on voit également les notations de Newton pour les fluxions ou différentielles : il employait ou les signes o, o^2,... ou bien il surmontait d'un, de deux,... points, les quantités différenciées.

A signaler ici, la notation a^{v} pour a^5 de Cavalieri (*Exercitationes Geometricæ*, Bologne 1647).

Leibniz s'est beaucoup occupé du symbolisme algébrique, à l'aide duquel il voulait créer une algèbre indépendante de toute idée de grandeur. Dès 1666, (*De complexionibus*), il propose, en outre de + et —, les signes ⌢, ⌣, π et *d* (²), pour marquer la multiplication,

(¹) Mercator (*Logarithmotechnia*, Londres, 1668) termine sa série par l'annotation *in infinitum*, qu'on voit déjà chez les Anciens, par exemple chez Théon de Smyrne, qui écrit μέχρις ἀπείρου.

(²) Il y a lieu de remarquer que Leibniz écrit d, en caractère droit, comme sin, cos, et non en italique, comme on fait aujourd'hui. Il distingue ainsi avec raison les symboles d'opération de ceux des quantités.

la division, l'égalité, la différenciation ; $\boxed{3}\,(ab, + cd)$; $a : b, : c$; $\overline{a + b}$, $\overline{c + d}$; a, $\overline{\overline{b + c}, \overline{ef + g}}$; $\sqrt{}a + \sqrt{}b(c + d))$; $\dot{-}$, $\overline{-}$, $\backsim$, $\backsimeq$; pour $(ab + cd)^3$, $\frac{a|b}{c}$, $(a + b)(c + d)$, $a[(b + c) + e(f + g)]$; $>$, $<$, semblable, semblable et égal. Il fit connaître en 1686, le signe $\int$, qu'il avait trouvé en 1675. Il représente un multiple d'un entier en le surmontant d'un point et désignait les équations successives par des signes astronomiques [1]. Il avait imaginé, en 1693, les indices et les déterminants sous leur forme actuelle, mais l'écrit où il consignait ces notations est resté longtemps inédit [2].

Newton, dans ses *Principia* (Londres, 1687), a mis $1a$, $2a$, $3a$,... et dans sa *Methodus differentialis* (id., 1711), $a1$, $a2$, $a3$,... en place de ce que nous écririons aujourd'hui a_1, a_2, a_3,... C'est lui qui a généralisé tout à fait la notion des puissances, en l'étendant aux exposants irrationnels, par exemple $a^{\sqrt{2}}$ [3].

Les points remplaçant les mentions « usque ad » ou autres analogues datent de Jacques Bernoulli, ainsi que les points multiplicatifs. En 1692, il écrit $\frac{1.2.3.4}{n.n+1...n+4}$ l'inverse d'un nombre figuré, et en 1702, Leibniz indique également par des points, la fin d'un polynome, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ...$

(1) Jacques Bernoulli, en 1701, les désigne par des numéros en chiffres romains ou arabes.

(2) Il représente aussi la division par une barre horizontale ou deux points, comme aujourd'hui. Cependant, de même que les Bernoulli, il remplace le vinculum et la barre de division, en multipliant les parenthèses, ce qui rend la lecture de leurs œuvres assez pénible.

A noter aussi que Jean Bernoulli désirait remplacer le signe $\int$, initiale du mot *somme*, par le signe I, initiale du mot *intégrale* : par un compromis entre ces deux grands savants, le mot de l'un a été adopté ainsi que le signe de l'autre.

(3) Il indique l'intégrale de $ax\,dx$, ainsi $\left|\overline{ax}\right.$. Taylor, outre les points de Newton pour les différentielles, emploie les accents pour désigner les intégrales des divers ordres.

Ainsi, à l'origine du XVIIIe siècle, l'écriture algébrique était arrivée à son entier développement, et elle n'a guère été modifiée depuis. Pourtant, par suite des théories nouvelles, surtout la théorie des nombres et celle des fonctions, elle s'est accrue de nouveaux signes, dont il suffira de rappeler les plus élémentaires.

Jean Bernoulli a imaginé les notations X, ξ (1698) et φx, (1718) pour désigner une fonction indéterminée de x, et le symbole Δ des différences (1706), complété en 1755, par Euler, qui donna $\Delta^2, \Delta^3, \ldots$ Ce dernier a également doté la théorie des nombres des signes $\overline{\perp}$, qui marque une impossibilité ; $\int n$, qui indique la somme des diviseurs de l'entier n ; $\left(\frac{a}{b}\right)$, pour la désignation du nombre combinatoire $C_{a,b}$.

Bouguer a donné le signe $\leq$ en 1734. et Vandermonde, en 1772, la notation $[p]^n$ pour indiquer la factorielle $p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)$ et la suivante $\frac{\alpha|\beta}{a|b}$, pour le déterminant de quatre éléments.

Lagrange, en 1770, indiquait par $\mathcal{E}\omega$ la partie entière du nombre non entier ω (1). En 1797, il a donné les symboles fx, $f(x, y)$, $f'x$, $f''x, \ldots y', y'', \ldots$ et plusieurs autres, qui n'ont pas été conservés. On lui doit aussi l'idée de la notation des indices.

Legendre, en 1798, a représenté par le signe $\left(\frac{a}{b}\right)$, le reste de la division de $a^{\frac{b-1}{2}}$ par b (2), et en 1808, le symbole $\mathcal{M}4$ pour désigner un multiple de 4 (3).

(1) Gauss a adopté le signe $[\omega]$, et Legendre, celui-ci $E(\omega)$. Aujourd'hui celui de Gauss paraît devoir l'emporter.

(2) Jacobi et Eisenstein ont désigné par $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)$ et $\left[\frac{a}{b}\right]$ les mêmes restes, dans le cas de puissances $\left(\frac{b-1}{4}\right)^e$ et $\left(\frac{b-1}{3}\right)^e$.

(3) Il a substitué plus tard un M gothique. Le multiple d'un nombre s'indique aussi d'une manière très lisible en le mettant en caractère gras. On pourrait aussi mettre $Q\frac{a}{b}$, $R\frac{a}{b}$, pour désigner le quotient et le reste de la division de a par b.

Gauss, en 1801, indique ainsi $a \equiv b$ (mod. c), deux nombres a et b qui ne diffèrent que d'un multiple de c ; $\sqrt{-1}$ par i ; le nombre des diviseurs de n, par $\varphi(n)$ (¹), enfin la *forme* $ax^2 + 2bxy + cy^2$ par l'abréviation (a, b, c).

Kramp mettait $a^{n|r}$ pour désigner la factorielle $a(a + r)(a + 2r) \ldots (a + nr - r)$; il proposa, en 1808, le signe $n!$ pour $1.2.3.4\ldots n$ (²).

Les conclusions qui semblent devoir se dégager de l'exposé qui précède, sont, d'une part, que l'histoire du vocabulaire mathématique serait une chose très désirable en dehors de son intérêt linguistique, comme présentant, en quelque sorte, une histoire de la science mathématique en raccourci, mais expressive ; — ensuite que la langue algébrique actuelle, malgré sa richesse, n'a pas atteint toute la perfection qu'elle pourrait avoir et que, en présence de l'extrême complication de son objet, une prudente révision de ses mots et de ses signes serait une œuvre de haute utilité.

Sur la fonction Eω. — Cette curieuse expression, dont Gauss, le premier, a fait comprendre l'importance, n'a pas encore été l'objet d'une étude systématique ; aussi peut-il être utile d'en réunir ici les propriétés fondamentales, ainsi que quelques exercices choisis.

On a :

$$0 < \omega - E\omega < 1, \qquad E\omega < \omega < 1 + E\omega,$$

$$\frac{1}{b} \leqslant \frac{a}{b} - E\frac{a}{b} \leqslant \frac{b-1}{b}, \qquad E(\omega \pm a) = E\omega \pm a,$$

(¹) On trouvera des listes étendues de notations arithmétiques dans les ouvrages de Cesaro et la monographie de M. Torelli, *Sulla totalita dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (Naples, 1901).

(²) Hindenburg, Arbogast et Kramp ont donné de nombreuses notations relatives à l'*analyse combinatoire*, mais ils n'ont guère eu d'imitateurs dans cette étude et leurs notations sont oubliées.

$$E(a-\omega)=a-E\omega-1,\quad E\,\frac{E\,\frac{a}{b}}{c}=E\,\frac{E\,\frac{a}{c}}{b}=E\,\frac{a}{bc},$$

$$1<\frac{\omega}{E\omega}<1-\frac{\omega}{(E\omega)^2},\qquad \sqrt{\omega}-\sqrt{E\omega}<\frac{1}{2\sqrt{E\omega}},$$

$$E\omega+\sqrt{\omega-E\omega}-\omega<\frac{1}{4},$$

$$E\frac{\omega}{b}+E\frac{\omega+a}{b}+E\frac{\omega+2a}{b}+\ldots+E\frac{\omega+(b-1)a}{b}=E\omega+\frac{(b-1)(a-1)}{2}.$$

Entre ω et ω', il y a $(E\omega-E\omega')$ entiers.

Dans les b premiers entiers, il y a $E\,\frac{b}{a}$ multiples de a.

$aE\,\frac{b}{a}$ est le plus grand multiple de a inférieur à b.

Si $\omega-E\omega<\frac{1}{n}$, $E(n\omega)=nE\omega$.

Si $a<b$, on a :

$$E\left(\frac{a}{b}\,E\,\frac{cb}{a}\right)=c-1\text{(1)},\qquad E\left[\frac{a}{b}\left(1+E\,\frac{cb}{a}\right)\right]=c.$$

(1) La démonstration de ce cas fera aisément comprendre la marche à suivre en général.

On a :

$$0<\frac{cb}{a}-E\,\frac{cb}{a}<1\qquad\text{d'où}\qquad 0<c-\frac{a}{b}\,E\,\frac{cb}{a}<\frac{a}{b}$$

or on peut écrire de même

$$0<\frac{a}{b}\,E\,\frac{cb}{a}-E\left(\frac{a}{b}\,E\,\frac{cb}{a}\right)<1$$

d'où, en ajoutant,

$$0<c-E\left(\frac{a}{b}\,E\,\frac{cb}{a}\right)<1+\frac{a}{b}.$$

Soit $E\sqrt{\omega} = a$; *à mesure que n augmente, la valeur de l'expression*

$$\frac{\omega^n + C_{2n,2}\omega^{n-1}a^2 + C_{2n,4}\omega^{n-2}a_4 + \ldots}{C_{2n,1}\omega^{n-1}a + C_{2n,3}\omega^{n-2}a^3 + C_{2n,5}\omega^{n-3}a^5 + \ldots}$$

tend vers la limite $\sqrt{\omega}$.

Selon que $\omega - E\omega \gtrless \frac{1}{2}$, *la valeur de* $E(2\omega) - 2E\omega$ *est* 1 *ou* 0 (Gauss).

Posons

$$f(a,b) = E\frac{a}{b} + E\frac{2a}{b} + E\frac{3a}{b} + \ldots E\frac{\frac{b-1}{2}a}{b};$$

les deux sommes $f(a, b)$ *et* $f(2a, b)$ *sont de même parité* (id.)

On a :

$$E\sqrt[3]{a(a+1)(a+2)\ldots(a+5)} = a^2 + 5a + 3\text{ (}^1\text{)} \quad \text{(Goulard).}$$

Le nombre de fois que le nombre premier p est facteur dans le produit n ! a pour expression

$$E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + E\frac{n}{p^3} + \ldots \qquad \text{(Legendre).}$$

Le nombre des termes de la série 1, 2, 3,... *n non divisibles par les nombres premiers p, q, r,... est donné par la formule*

$$n - \sum E\frac{n}{p} + \sum E\frac{n}{pq} - \sum E\frac{n}{pqr} + \ldots \qquad \text{(id.)}$$

(1) Pascal a donné cette relation

$$\sqrt[n]{n!} - 1 < \sqrt{a(a+1)\ldots(a+n-1)} - a < \frac{n+1}{2}$$

On peut aussi écrire $E\left(e\sqrt[n]{n!}\right) = n + 1$. (Voir *Ens. Math.* 1906, p. 354).

Soit $a < b$ *; le nombre des termes de la suite* $E\,\frac{b}{a+1}$, $E\,\frac{b}{a+2}, \ldots$ $E\,\frac{b}{b}$, *égaux au premier est* $E\,\frac{b}{E\,\frac{b}{a+1}}$. (Berger).

On a :

$$\sum E\,\frac{a-bx}{c} = \sum E\,\frac{a-cx}{b} \qquad \text{(Hermite).}$$

$$\sum E\,\frac{a+x}{2x} = \sum E\,\frac{a}{2x+1} \qquad \text{(Césaro).}$$

$$\sum_{a+1}^{2a} E\,\frac{2a}{x} = a \qquad \text{(id.)}$$

$$\sum E\,\frac{a-bx}{x} = \sum E\,\frac{a}{b+x} \qquad \text{(id.)}$$

$$\sum_{1}^{a} \int x = \sum_{1}^{a} x E\,\frac{a}{x} \qquad \text{(id.)}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\omega}{2x} + \frac{1}{2}\right) = E\omega \qquad \text{(id.)}$$

$$\sum E\left(\frac{a}{x} + \frac{1}{2}\right) = \sum E\,\frac{2a}{x} \qquad \text{(id.)}$$

$$\sum_{1}^{a} E\,\frac{ab}{x} + \sum_{1}^{b} E\,\frac{ab}{x} - \sum_{1}^{ab} E\,\frac{ab}{x} = ab \qquad \text{(id.)}$$

Sur les inégalités. — La théorie des inégalités pourrait être davantage développée dans les éléments. Les inégalités de la forme $a > b$ ou $F(a) > F(b)$ sont peu intéressantes ; mais celles de ce genre $F(x) > a$ le sont presque toujours : elles fournissent une limite de la valeur de la fonction F, avec le sens de l'approximation, et inversement une fonction permettant de définir approximativement le nombre incommensurable a. Dans ce cas, l'habileté est de

savoir choisir la fonction F, de manière à serrer l'approximation d'aussi près que possible, tout en conservant à cette fonction la simplicité désirable. Cette recherche ne laisse pas souvent que d'être délicate, le problème étant, par sa nature même, indéterminé.

Un autre genre d'inégalités importantes comprend celles de la forme $f(a, k) > F(a)$, où f s'approche d'autant plus de F que k prend des valeurs de plus en plus grandes, le plus souvent celles des termes de la suite 1, 2, 3, 4,... ou de celle-ci 1, 2, 4, 8, 16,... Telles sont les séries, les fractions continues, les fonctions récurrentes, les expressions de ce genre

$$k\left(\sqrt[k]{a} - 1\right), \qquad \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k$$

La double inégalité $A > F(a) > \alpha$ permet de donner, comme approximation, la demi-somme $\frac{1}{2}(A + \alpha)$; la limite supérieure de l'erreur étant $\frac{1}{2}(A - \alpha)$. Par exemple, soit $\frac{\alpha}{a} > X > \frac{\beta}{b}$; on prendra, pour la valeur de X, celle de l'une des expressions intermédiaires suivantes

$$\frac{\alpha b + a\beta}{2ab}, \qquad \sqrt{\frac{\alpha\beta}{ab}}, \qquad \frac{2\alpha\beta}{a\beta + \alpha b}, \qquad \frac{\alpha + \beta}{a + b}.$$

Dans le premier cas, l'erreur est inférieure à $\frac{\alpha b - a\beta}{2ab}$. Ainsi on a : $\left(1 \pm \frac{x}{2}\right)^2 > 1 \pm x$; changeons x en $\frac{-x}{1 \pm x}$, il viendra, si $0 < x < 1$,

$$\frac{2 \pm x}{2} > \sqrt{1 \pm x} > \frac{2 \pm 2x}{2 \pm x}.$$

La première et la troisième formules donnent les approximations

$$\frac{8 \pm 8x + x^2}{8 \pm 4x} \quad \text{et} \quad \frac{8 \pm 12x + 4x^2}{8 \pm 8x + x^2},$$

qui comprennent la racine cherchée, car leur produit est égal à $1 \pm x$; la quatrième formule fournit ensuite la relation

$$\sqrt{1 \pm x} = \frac{16 \pm 20x + 5x^2}{16 \pm 12x + x^2}$$

avec une erreur inférieure à $\frac{x^4}{4(2 \pm x)(8 \pm 8x + x^2)}$, ou sensiblement $\frac{x^4}{64}$. On peut tirer de là une formule donnant l'extraction de la racine carrée, en changeant x en $\frac{b}{a^2}$.

Soit encore la relation $f(a, n) > F(a) > \varphi(a, n)$, les fonctions f et φ étant liées par une loi simple et telles que leur différence ou leur rapport tend vers une limite fixe et finie, quand n tend vers l'infini. Archimède, Huygens et Gregory ont donné de cette simple considération, de très belles applications, qui montrent combien elle peut jeter de jour sur les théories s'appuyant — ostensiblement ou non — sur l'idée de l'infini.

Il sera seulement question ici de deux inégalités très élémentaires mais fondamentales.

Théorème des deux moyennes. — Euclide a démontré géométriquement que $a + b > 2\sqrt{ab}$, et Eutocius, probablement d'après Archimède, que $2a + b > 3\sqrt[3]{a^2b}$. Ricci (*Geometrica exercitatio*, Rome 1666), a fait voir que *si $x + y$ est constant, le produit x^py^q est maximum quand on a $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$*. Mac Laurin (*Treat of Flux* Edinb. 1742), a étendu ce théorème au produit $x^py^q...(a - x - y - ...)^r$, et Cauchy (*An. Alg.*, Paris, 1821), l'a présenté ainsi : *la moyenne arithmétique de nombres positifs est plus grande que leur moyenne géométrique*. J'ai donné récemment dans *Mathesis*, la démonstration de Ricci et diverses démonstrations du théorème de Cauchy, entre autres cinq nouvelles, dont celle qui suit.

La somme des nombres a, b,... l étant nulle, on a :

$$(1) \qquad 1 > (1 + a)(1 + b)\ldots(1 + l).$$

En effet, si la somme des k nombres a, α, b,... c est nulle, on a par exemple, $a > 0$, $\alpha < 0$, d'où

$$(2) \qquad 1 + a + \alpha > (1 + a)(1 + \alpha)$$

Si (1) a lieu pour $k - 1$ nombres, on pourra écrire

$$1 > (1 + a + \alpha)(1 + b)\ldots(1 + c)$$

d'où multipliant par (2), ce qui est permis si $1 + \alpha > 0$,

$$1 > (1 + a)(1 + \alpha)(1 + b)\ldots(1 + c),$$

et comme $1 > (1 + a)(1 - a)$, la relation (1) est donc générale. Changeant a, b,... l en $\frac{a}{Q}$, $\frac{b}{Q}$,... $\frac{l}{Q}$, (1) devient

$$(3) \qquad Q^n > (Q + a)(Q + b)\ldots(Q + l)$$

Théorème de Stolz. — Archimède a remarqué que *dans la progression arithmétique* H, Θ, I, K, *on a* : $\left(\frac{K}{I}\right)^3 < \frac{K}{H}$, ou que $(1 + x)^3 > 1 + 3x$. Huygens a démontré (*De Circuli Magnitudine inventa*, Leyde, 1652), que *les trois points* B, F, R *étant en ligne droite dans l'ordre indiqué, on a* : $\frac{BF}{BR} > \left(\frac{3.BR + RF}{3.BR}\right)^3$, ou que $(1 + x)^3 < \frac{1}{1 - 3x}$. Sluze (*Mesolabum*, Leyde, 1668), a généralisé ainsi le théorème d'Archimède : *dans une progression arithmétique décroissante, la* q^e *puissance du rapport du* $(p + 1)^e$ *terme au premier est plus petite que la* p^e *puissance du rapport du* $(p + q)^e$ *terme au* $(p + 1)^e$; ce qui revient à écrire :

$$(1 + px)^q (1 - qx)^p < 1$$

Jacques Bernoulli (*De seriebus infinitis*, 1689), fait voir que *si deux progressions, arithmétique et géométrique, ont leurs deux premiers termes égaux, ceux de la seconde croissent plus rapidement que ceux de la première*. Mac-Laurin (*Treatise of Fluxions*, Edinburg, 1742), a *montré qu'on* a :

$$na^{n-1} > \frac{a^n - b^n}{a - b} > nb^{n-1} \qquad (a > b)$$

Cauchy (*Ex. d'anal. et de Phys.* 1847), a étendu ce théorème de Mac-Laurin au cas de n fractionnaire positif ou négatif. Enfin Stolz (*Algemeine Arithmetik*, Leipzig, 1885), a donné une relation qu'on peut présenter plus simplement ainsi :

$$(4) \qquad \frac{1}{1 - ax} > (1 + x)^a > 1 + ax$$

$$\left(a, \text{ rationnel, et} > 1, -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}\right).$$

Ce théorème important, remis tout récemment en lumière par M. Gravelaar (*Rekenkunde*, t. 2, Groningen, 1907), est placé au seuil de l'analyse infinitésimale, à laquelle il peut servir d'initiation ; il peint, pour ainsi dire, la croissance de la fonction a^x. Il a été utilisé par Ricci, Sluze, Mac-Laurin, Cauchy, Schlömilch. On peut en tirer de nombreux théorèmes de maximum (voir *Mathesis*, 1904, p. 179), de calcul infinitésimal (voir *Prog. mat.* 1900, p. 407), ainsi qu'une théorie complète des logarithmes (*Ens. math.* 1906, p. 344). En voici deux démonstrations très simples.

On a identiquement :

$$q(z^p - 1) - p(z^q - 1)$$

$$= \left[(z^{p-q-1} + \ldots + z^2 + z + 1) - (p - q)\frac{z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-q}}{q}\right] qz^q(z - 1)$$

Soit $p > q$. Ecrivons $z \gtrless 1$; le premier terme de l'expression entre crochets est $\gtrless p - q$ et le second $\lessgtr p - q$. Cette expression

est donc $\gtrless 0$, et son produit par $z - 1$, toujours positif. Le premier membre est donc lui-même positif, si de plus $z > 0$ [1].

De même, on a :

$$q(z^p - 1) - pz^p(z^q - 1)$$
$$= \left[(z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-p+1} + z^{-p}) - p\frac{z^{q-1} + \ldots + z + 1}{q}\right] qz^p(z - 1).$$

Selon que $z \gtrless 1$, le premier terme de l'expression entre crochets est $\lessgtr p$, et le second $\gtrless p$; cette expression est donc $\lessgtr 0$ et son produit par $z - 1$ toujours négatif. Il en est de même du premier membre si de plus $z > 0$.

Posant $z = \sqrt[q]{1 + x}$, on retrouve (4).

Autre démonstration. q, j, k, l étant positifs et $k + l > 1$, $q - jx > 0$, $l > k$, $q + kx - x > 0$, $q + lx - x > 0$, on a ;

$$1 + \frac{x}{q - jx} > 1 + \frac{x}{q + kx - x} > 1 + \frac{x}{q + lx - x}.$$

Faisant $k = 1, 2, 3, \ldots q$ et multipliant, chose permise si tous les facteurs sont positifs, c'est-à-dire si on a ces nouvelles conditions

$$q - jx + x > 0, \qquad q + kx > 0, \qquad q + lx > 0,$$

on trouve :

$$\left(1 + \frac{x}{q - jx}\right)^q > 1 + x > \left(1 + \frac{x}{q + lx - x}\right)^q, \qquad (l > q)$$

Faisant maintenant $j = 1, 2, 3, \ldots p$; $l = q + 1, q + 2, \ldots p$, il vient :

$$\left(\frac{q}{q - px}\right)^q > (1 + x)^p, \qquad (1 + x)^{p-q} > \left(\frac{q + px}{q + qx}\right)^q$$
$$\left(p > q, \quad \begin{matrix} q - px > 0 & \text{ou} & q - px + x > 0 \\ q + px > 0 & \text{ou} & q + px - x > 0 \end{matrix}\right)$$

(1) Cette première partie de la démonstration est de Cauchy.

Ces limitations reviennent à $-\frac{q}{p} < x < \frac{q}{p}$, et on peut donc écrire :

$$(5) \quad \frac{1}{1-\frac{p}{q}x} > (1+x)^{\frac{p}{q}} > 1 + \frac{p}{q}x\ ^{(1)} \quad \left(p>q, -\frac{p}{q}<x<\frac{p}{q}\right).$$

Application. I. *Selon que le nombre positif t est* $\gtrless$ 1, *la valeur de* t^x *croît ou décroît en même temps que croît le nombre positif* x, *entier ou fractionnaire.* En effet posons $t = 1 \pm \alpha$ et soit $k > 1$, on aura

$$1 \pm (k-1)x > \frac{1}{1 \mp (k-1)x} > \frac{t^{kx}}{t^x} = (1 \pm \alpha)^{(k-1)x} > 1 \pm (k-1)x.$$

II. *x tendant vers zéro, on a* : lim. $t^x = 1$. Conséquence de (4).

III. *Si les nombres commensurables a, b, c,... α, β, γ,... tendent vers une limite incommensurable x, les premiers en augmentant, les seconds en diminuant, les puissances t^a, t^b,... t^α, t^β,... tendront également vers une même limite*, qu'on désignera par le symbole t^x, et *cette limite sera indépendante du mode de croissance ou de décroissance des nombres donnés.* Les rapports

$$\frac{t^a}{t^\alpha} = t^{a-\alpha}, \quad \frac{t^b}{t^\beta} = t^{b-\beta}, \ldots$$

tendent en effet vers l'unité, quel que soit ce mode, d'après I et II.

IV. *Si x et x' désignent deux nombres incommensurables définis*

(1) On a une troisième démonstration indirecte, mais plus simple en remarquant que si les $n+q$ facteurs du produit $(1+\alpha x)^n\,(1+\beta x)^q$ sont *positifs*, ce produit est inférieur à la $(n+q)^e$ puissance de leur moyenne arithmétique, $1 + \frac{n\alpha x + q\beta x}{n+q}$. On n'a qu'à faire :

$$1^\circ\ \alpha = 1,\ \beta = -\frac{p}{q},\ n = p, \quad \text{et} \quad 2^\circ\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{p}{q},\ n = p - q.$$

comme dans III, *on a* : $t^x t^{x'} = t^{x+x'}$, ce qui résulte de ce que les rapports

$$\frac{t^{a+\alpha}}{t^{a'}t^{\alpha'}}, \quad \frac{t^{b+\beta}}{t^{b'}t^{\beta'}}, \ldots$$

tendent vers l'unité en même temps que vers la limite $\frac{t^{x+x'}}{t^x t^{x'}}$.

Le calcul des puissances fractionnaires s'étend donc aux expressions symboliques de forme t^x. La relation (4) a donc lieu pour a quelconque mais plus grand que 1.

V. *Si le nombre positif quelconque m tend vers* ∞, on a :

$$\lim\left(1+\frac{a}{m}\right)^m = \lim\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^a.$$

Faisant, dans (4), $x = \frac{1}{m}$, prenant les inverses, multipliant par $1 + \frac{a}{m}$ et élevant à la puissance m, on trouve :

$$1 - \frac{a^2}{m} < \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^m < \left[\frac{1+\frac{a}{m}}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^a}\right]^m < 1;$$

donc $\left(1+\frac{a}{m}\right)^m$ et $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{am}$ tendent à acquérir les mêmes valeurs. Mais la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est fixe et finie [1]; en l'appelant e, on peut ainsi écrire :

$$(6) \qquad \lim\left(1+\frac{a}{m}\right)^m = e^a$$

[1] En effet, d'après (4) on a pour $\alpha > 1$

$$\left(1+\frac{1}{m\alpha}\right)^\alpha > 1 + \frac{1}{m}, \text{ d'où } \left(1+\frac{1}{m\alpha}\right)^{m\alpha} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

ce qui fait voir que la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente toujours jusqu'à

VI. Posons $e^a = \alpha$, $e^b = \beta$, et écrivons $L\alpha = a$, $L\beta = b$; on aura :

$$(7) \qquad L(\alpha\beta) = L\alpha + L\beta, \qquad L1 = 0, \qquad L\alpha^\mu = \mu L\alpha,$$

μ désignant un nombre quelconque, positif ou négatif, commensurable ou non.

VII. Le cacul de $L\alpha$ peut se traiter à l'aide des considérations suivantes. De (6) on tire :

$$(8) \qquad \lim\left(1 + \frac{L\alpha}{n}\right)^n = \alpha, \quad \text{d'où} \quad L\alpha = \lim n\left(\sqrt[n]{\alpha} - 1\right).$$

VIII. *h tendant vers zéro, on a* :

$$(9) \qquad \lim \frac{e^h - 1}{h} = 1, \qquad \lim \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a.$$

On a, en effet,

$$\frac{h}{1-h} > \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1 > h,$$

d'où, à la limite

$$\frac{1}{1-h} > \frac{e^h - 1}{h} > 1.$$

Sur les identités. — Leibniz a dit que « le fondement des

l'infini, ou jusqu'à une limite finie. Or c'est cette dernière hypothèse qui est la vraie. Car si on fait $k = 1, 2, 3, \ldots n$ dans la relation suivante, où $k > 0$,

$$\frac{n+k+1}{n+k} < 1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{2n+k+1}{2n+k}\,\frac{2n-k+2}{2n-k+1},$$

il vient, après multiplication et réduction,

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3n+1}{n+1} < 3.$$

mathématiques est le principe de la contradiction et de l'identité. » Et en effet, il semble bien que toute la mathématique se réduit à « exprimer une chose en deux façons » comme dit Descartes. On peut conclure de ceci qu'on ne saurait habituer trop tôt, à la théorie des identités, l'esprit des débutants. J'ai donné sur ce sujet en 1907, dans *Mathesis*, une étude élémentaire dont voici un extrait.

La source la plus féconde est l'utilisation d'identités évidentes ou déjà connues, au moyen de simples substitutions. Ainsi : 1° la suivante

$$A - D = (A - B) + (B - C) + (C - D)$$

donne, en faisant

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{1}{\alpha - \gamma}, \quad C = \frac{1}{\alpha - \delta},$$

puis

$$\alpha = \frac{a}{a'}, \quad \beta = \frac{b}{b'}, \quad \gamma = \frac{c}{c'}, \quad \delta = \frac{d}{d'},$$

l'importante identité de Fontaine (1770), résultant de la multiplication de deux déterminants de quatre éléments et dont la formule de Fibonacci est un cas particulier.

2° L'identité d'Euler

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ldots = 1 + a + b(1+a) + c(1+a)(1+b) + \ldots$$

en fournit beaucoup d'autres de Nicole, Sterne, Eudoxe, Ed. Lucas, Jacques Bernoulli, Brouncker, Laurent, Pascal, Stirling, etc. On citera seulement les substitutions suivantes :

$$a = \frac{\alpha}{1}, \quad b = \frac{\beta}{1 + \alpha}, \quad c = \frac{\gamma}{1 + \alpha + \beta}, \ldots ;$$

$$a = b = \ldots = x - 1 ;$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \ldots ;$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{2}{3}, \quad c = -\frac{3}{4}, \ldots;$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = -\frac{1}{4}, \ldots;$$

$$a = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad b = \frac{\beta}{1-\beta}, \ldots;$$

$$a = \frac{n}{1}, \quad b = \frac{n}{2}, \quad c = \frac{n}{3}, \ldots;$$

$$a = -\frac{n-1}{n}, \quad b = -\frac{n-1}{n+1}, \quad c = -\frac{n-1}{n+2}, \ldots;$$

$$a = \frac{n-1}{1}, \quad b = \frac{n-2}{2}, \ldots;$$

$$a = \frac{1}{n-1}, \quad b = \frac{2}{n-2}, \ldots$$

3° De l'identité

$$\frac{1-x^a}{1-x}\,\frac{1-x^{ab}}{1-x^a}\,\frac{1-x^{abc}}{1-x^{ab}}\cdots\frac{1-x^{ab\ldots kl}}{1-x^{ab\ldots k}} = \frac{1-x^{a\ldots l}}{1-x}$$

On tire, pour $a = 1$, $b = 2$, $c = 3, \ldots\ l = n$,

$$(1+x)(1+x^2+x^4)(1+x^6+x^{12}+x^{18})(1+x^{24}+x^{48}+x^{72}+x^{96})\ldots$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

ce qui fait voir qu'on peut peser avec des poids de 1 g., 2 g., 4 g., 6 g., 12 g.,... $n(n!)$ g. un nombre quelconque de grammes, jusqu'à $1 + 6 + \ldots + \dfrac{n(n+1)!}{2}$ g.

Pour $a = b = c = \ldots = n$, on verra qu'en posant

$$F(x) = (1 \pm x^{n^{k-1}})(1 \pm x^{n^{k-2}})\ldots(1 \pm x^{n^0}), \quad f(x) = \frac{1 \pm x^{n^k}}{1 \pm x},$$

on a :

$$F(x)\,f(x) = F(x^n);$$

d'où l'expression du produit

$$F(x) f(x^n) f(x^{n^2})\ldots$$

En attribuant diverses valeurs aux lettres n, k, on arrive à des identités qu'indiquent ces égalités

$$\begin{array}{ll} F(x) = 1 - x, & f(x) = 1 + x \\ F(x) = 1 - x, & f(x) = 1 + x + x^2 \\ F(x) = 1 + x + x^2 & f(x) = 1 - x + x^2 \\ F(x) = 1 - x - x^2 + x^3 & f(x) = 1 + x + x^2 + x^4 \end{array}$$

et dont les trois premières sont d'Euler et de Catalan.

4° Posant $kF(x^2) - F(x) = f(x)$, on obtiendra aisément une identité donnant la somme de la suite

$$F(x) + f(x) + kf(x^2) + k^2f(x^4) + k^4f(x^8) + \ldots$$

Soit $F(x) = \dfrac{ax + b}{x - 1}$; suivant qu'on a $k = 1$ ou $k = 2$, il vient :

$$f(x) = -\frac{(a + b)x}{x^2 - 1} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{ax - b}{x + 1}.$$

Le cas de $a = 0$, $b = 1$ donne deux séries sommées par Catalan. On en a d'autres en posant $a = b = 1$; $a = 1$, $b = 0$; $a = 2$, $b = 1$;...

On pourra étudier les relations suivantes :

$$kF(x + 1) - F(x) = f(x), \qquad kF(ax) - F(x) = f(x), \qquad \text{etc.}$$

II. Ce théorème, énoncé explicitement pour la première fois, par Lagrange ; *si la fonction entière* $F(x)$ *s'annule pour* $x = a$, *elle est divisible par* $x - a$, *et réciproquement*, sert surtout à vérifier une identité proposée.

On a aussi de lui le suivant : *Si une fonction entière du degré* n

prend la même valeur pour plus de n valeurs de la variable, elle est constante. Ainsi la fonction suivante de Leibniz

$$\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+a)(x+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$$

étant du degré 2 et gardant la même valeur 1, pour les trois valeurs $-a$, $-b$, $-c$, de x, sa valeur est constante et égale à 1.

III. *Si une fonction change de signe en gardant la même valeur absolue quand on permute deux quelconques a, b, des lettres qui la composent, elle est divisible par* $a-b$ (Cauchy). Ainsi la fonction $a^2(b-c)+b^2(a-c)+c^2(a-b)$ est divisible par $a-b$, par $b-c$, par $c-a$; on a donc cette identité donnée géométriquement par Stewart (1763) :

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

Les fonctions $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ et $-3bc(b-c) -3ac(c-a)-3ab(a-b)$ sont dans le même cas et ont même somme. Quant à la fonction $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$, qui est dans le cas du théorème, elle est également divisible par $-(a-b)(b-c)(c-a)$, mais elle a en outre un autre diviseur P, sans quoi elle ne serait pas du quatrième degré. P est évidemment symétrique en a, b, c et ne peut être que $a+b+c$.

IV. L'exemple suivant enseignera encore un moyen de déduire de nouvelles identités d'autres déjà connues. Dans l'identité de Stewart, changeons successivement par permutations tournantes, a, b, c en b, c, d, en c, d, a, et d, a, b ; puis multiplions respectivement par d^2, $-a^2$, b^2 et $-c^2$, les quatre relations résultantes ; il viendra, en ajoutant, une identité trouvée par Chasles et donnée plus généralement par Euler (voir plus loin).

V. L'identité $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ est souvent employée.

1° On a : $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$, d'où, pour $A=a^2$, et $B=2b^2$,

$$(1) \qquad a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$$

d'où on déduit, avec Sophie Germain, qu'*aucun nombre* $a^4 + 4$, *sauf* 5, *n'est premier*.

On a aussi en particulier cette identité d'Euler

$$(\beta) \qquad 4b^2 + 1 = (2b^2 + 2b + 1)(2b^2 - 2b + 1)$$

qui lui a servi à démontrer cette proposition de Goldbach : *aucun nombre* $4b^4 + 1$ *n'est premier*.

Leibniz avait donné antérieurement un autre cas particulier de (α), celui où $b = \sqrt{2}x$. Catalan l'a généralisé ainsi :

$$a^4 + 2ka^2 + l^2 = (a^2 + a\sqrt{2(l-k)} + l)(a^2 - a\sqrt{2(l-k)} + l),$$

et Le Lasseur a signalé le cas remarquable où on fait, dans (β), $b = 2^n$, et en a tiré la décomposition immédiate en facteurs du nombre $2^{58} + 1$, que Landry n'avait pu effectuer qu'avec les plus grandes peines à l'aide des méthodes générales.

Catalan a de même trouvé la relation

$$3^{6n+3} + 1 = (3^{2n+1} + 1)(3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1)(3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1).$$

2° Changeons le produit $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)(Ax^3 - Bx^2 + Cx - D)$ en une différence de deux carrés et identifions-le à $x^6 - 1$; on trouvera $A = D = 1$, $2C - B^2 = 0$, $C^2 - 2B = 0$, $B = C = 2$. L'identité ainsi obtenue est due à A. Boutin.

3° On a identiquement $(1 + x + x^2)^2 - 2x(1 + x)^2 = 1 - x^2 + x^4$. Pour $x = 2a^2$, on aura la décomposition de $1 - 4a^4 - 16a^8$ en deux facteurs. En particulier, si $a = 2^n$, on obtiendra une identité numérique donnée par Ed. Lucas.

VI. On se sert aussi beaucoup de la méthode des coefficients indéterminés. Voici quelques exemples très simples.

1° Soit à développer $\dfrac{x^n}{(x-a)(x-b)\ldots}$ en une suite de la forme $\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \ldots$ Avec Euler, on multipliera par $x - a$ les

deux membres de l'égalité et on fera $x = a$, ce qui donnera A, puis de même B,...

2° Posons, d'après Stirling,

$$F(n) = (1 + x)(1 + 2x)\dots(1 + nx - x) = 1 + A_n x + B_n x^2 + \dots$$

Il viendra, en changeant x en $x + 1$,

$$F(n + 1) = (1 + nx)\,F(n),$$

d'où, en développant et identifiant,

$$A_{n+1} = A_n + n, \qquad B_{n+1} = B_n + nA_n, \dots$$

Stirling décompose de même x^n en une suite de la forme

$$Ax + Bx(x - 1) + Cx(x - 1)(x - 2) + \dots$$

et donne beaucoup d'autres sommations très remarquables.

3° Avec Euler, posons

$$(1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x)\dots = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots$$

Changeons x en ax dans le second membre et égalons le résultat à ce même second membre multiplié par $(1 + ax)$; il viendra successivement les expressions de A, B, C,...

Il agit de même sur

$$\frac{1}{(1 - ax)(1 - a^2x)\dots}$$

VII. Voici une autre théorie due à Euler et basée sur cette remarque que deux quantités de la forme $x + \sqrt{y}$ ne peuvent être égales que si les parties rationnelles sont égales, de même que les parties irrationnelles.

Si F désigne une fonction entière, la relation $F(a + \sqrt{b}) = A + B\sqrt{b}$ entraîne cette autre $F(a - \sqrt{b}) = A - B\sqrt{b}$. On peut ainsi poser :

$$(a \pm \sqrt{b})^n = A_n \pm B_n\sqrt{b}, \qquad \text{d'où} \qquad (a^2 - b^2)^n = A^2_n - bB^2_n$$

Les expressions A_n, B_n se calculent au moyen des récurrences suivantes, dues à Euler,

$$A_{n+1} = aA_n + bB_n, \qquad B_{n+1} = A_n + aB_n$$
$$A_{n+1} = 2aA_n - (a^2 - b)A_{n-1}, \qquad B_{n+1} = 2aB_n - (a^2 - b)B_{n-1}$$

Pour obtenir l'expression qui précède dans le cas d'une puissance de degré très élevé, on se servira préférablement des relations de Genocchi

$$A_{2n} = A^2_n + bB_n, \qquad B_{2n} = 2A_nB_n.$$

VIII. La considération des racines des équations conduit à de nombreuses identités.

1° Soient α et β les racines de l'équation $x^2 - ax + b = 0$; en posant

$$X = xx' - byy', \qquad Y = xy' + yx' + ayy'$$

et remarquant que $\alpha^2 = a\alpha - b$, on aura

$$(x + \alpha y)(x' + \alpha y') = X + \alpha Y.$$

Comme $(x + \alpha y)(x + \beta y) = x^2 + axy + by^2$, on conclura que *le produit de deux facteurs de la forme* $x^2 + axy + by^2$ *est de même forme* (Lagrange). Euler avait antérieurement fait voir la même chose pour le cas de $a = 0$. Voir p. 141, les formules (8) et (7).

2° Ed. Lucas a tiré d'importantes conséquences arithmétiques de la considération des fonctions

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \qquad V_n = a^n + b^n, \qquad \Delta = P^2 - 4Q,$$

a et b désignant les racines de l'équation $x^2 - Px + Q = 0$.

IX. Euler a montré le rôle que jouent les imaginaires dans la découverte d'identités démontrées jusque là a posteriori. Ainsi, de l'identité

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi),$$

on tire, en quarrant, cette relation de Platon, cas particulier de celle de Fibonacci,

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$

De même, faisant de deux manières, le calcul du produit

$$(a + bi)(\alpha \pm \beta i)(a - bi)(\alpha \mp \beta i)$$

on retrouve la formule de Fibonacci. On retrouve d'autres identités d'Euler en opérant de même sur les expressions $(a^2 + b^2)^3$, $(a^2 + b^2)^4$, $(a^2 + kb^2)(\alpha^2 + k\beta^2)$,...

Hermite a retrouvé, par des moyens semblables, la formule (9) de la p. 141.

X. Bien que les identités s'appliquent à des nombres quelconques, elles sont souvent utilisées dans la théorie des nombres, comme fournissant des solutions élémentaires sur la forme de certains nombres. Il suffira de rappeler ici, — outre diverses relations citées dans le cours des présentes notes, — les propositions suivantes, aisées du reste à démontrer.

Tout nombre premier ne peut être qu'une fois la différence de deux carrés (Fermat).

Si k est positif, un nombre premier ne peut être qu'une fois de la forme $x^2 + ky^2$ (Euler).

Tout nombre $ka^2 + lb^2$ *divise un certain nombre de la forme* $x^2 + kly^2$ (id.) Ainsi tout nombre de la forme $a^2 + 1$ en divise une infinité d'autres de la même forme, et en effet on a :

$$(a^2 + 1)\left[(ka + 1)^2 + k^2\right] = (ka^2 + a + k)^2 + 1.$$

Le produit de facteurs compris sous les formes $ax^2 + by^2$ *et* $x^2 + aby^2$ *est de la première ou de la deuxième forme selon que le nombre des facteurs de la seconde est pair ou impair* (id.)

Tout diviseur commun aux nombres $a^2 - kb^2$, $a'^2 - k'b'^2$,... *divise un certain nombre de la forme* $x^2 - kk'...y^2$ (Lagrange).

Si $a^2 + kb^2$ *est divisible par le nombre premier* $\alpha^2 + k\beta^2$, *le quotient est de même forme* (Euler).

Toute somme de trois carrés peut se mettre sous la forme $\frac{1}{6}(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ (Goldbach). Euler démontre cette proposition en écrivant $x = 2a + b - c$, $y = a - b + c$, $z = b + c$.

On résout l'équation $x^2 + ay^2 = z^2 + bw^2$ *en posant* :

$$x = b\alpha^2 - a\beta^2 + \gamma^2, \quad y = 2\beta\gamma, \quad z = b\alpha^2 - a\beta^2 - \gamma^2, \quad w = 2\alpha\gamma \qquad \text{(Euler).}$$

Si $8a + 4$ *est la somme de quatre carrés impairs, on peut en déduire la décomposition de* $4a + 2$ *et de* $2a + 1$ *en sommes de quatre carrés* (Euler). C'est une conséquence de l'identité $(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 = 2(\alpha + \beta + 1)^2 + 2(\alpha - \beta)^2$, et de ce que $4a + 2$ ne peut être composé que de deux carrés pairs et de deux carrés impairs (id.)

Si $3a$, $5b$, $7c$ *sont des sommes de quatre carrés, il en est de même de* a, *de* b *et de* c (Euler).

Soit a *la somme des entiers* f, g, h, j, *et* b, *celle de leurs carrés,* $4b - a^2$ *est la somme des carrés des trois nombres* $f + g - h - j$, $f - g + h - j$, $f - g - h + j$ (Cauchy).

Sur diverses énumérations. — De tout temps, les hommes ont trouvé utile et intéressant d'effectuer le dénombrement des objets en leur possession. Ils les classaient par tas d'abord quelconques, puis égaux ; ensuite par groupes d'un nombre fixe, cinq ou dix, et chez les savants, douze, vingt ou soixante. Leur conception du nombre s'élargissant, ils imaginèrent les groupes de groupes : ils aboutirent ainsi à la notion des progressions arithmétique et géométrique.

L'idée plus abstraite des combinaisons ne vint que beaucoup plus tard. Quoiqu'on en voie des traces chez les Anciens, ce n'est que chez les Indiens qu'on voit leur appliquer des méthodes de calcul exactes. C'est Pascal qui, dans le but d'établir les règles de certains

calculs relatifs aux probabilités, en a le premier donné des définitions nettes et en a démontré les formules.

Les propriétés des puissances et celles des combinaisons forment la base habituelle des énumérations.

Les nombres abstraits eussent fourni un nombre très limité de problèmes de ce genre, si les questions de probabilités n'étaient venues offrir à la sagacité des géomètres, des énumérations concrètes souvent très délicates à traiter. Les questions qui vont suivre ont été choisies de manière à faire comprendre rapidement le but de ces importantes théories aux commençants qui ne les connaissent pas.

Le nombre 2^{1000} *se termine à droite par les chiffres* 76. *Le nombre* 1 000 ! *se termine par* 249 *zéros* (de Rocquigny).

Dans un produit de n facteurs, on peut, de $2^n - 1$ *manières changer les signes les facteurs sans changer celui du produit* (N. A. 1851).

Avec cinq dés, combien peut-on amener de coups différents ? (Montmort).

Combien y a-t-il de termes dans le développement de $(a + b + \ldots + l)^n$? (Kramp).

De combien de manières peut-on décomposer un produit de kn facteurs en k produits de n facteurs ? (id.)

De combien de manières peut-on faire la multiplication de n facteurs ? (Catalan).

D'un paquet de n jetons on ôte le premier, on met le second sous le paquet, on ôte le troisième, on met le quatrième sous le paquet, et ainsi de suite. Dans quel ordre les jetons ont-ils été tirés ? (Ribi).

Il y a dérangement *ou* inversion *dans une permutation des n premiers nombres entiers quand un de ces nombres est suivi d'un autre plus petit. Le nombre total des inversions est égal à* $\frac{1}{2}\, n!\, C_{n,2}$ (Bézout).

Parmi les combinaisons n à n de p lettres, il y en a $C_{r,n}\; C_{p-r,n-q}$ *qui comprennent q des lettres d'un groupe désigné de r lettres, et* $C_{r,n} \sum_q^n C_{p-r,n-k}$ *qui en comprennent au moins q* (Liagre).

Dans une certaine permutation des n premiers nombres, on connaît le

nombre des nombres supérieurs à 1 *et placés avant* 1, *celui des nombres supérieurs à* 2 *et placés avant* 2, *et ainsi de suite. Quelle est cette permutation?* (Brun).

Dans le développement du produit $(1-a)(1-b)(1-c)\ldots$, *quel est le signe du* n^e *terme?* (Catalan).

On jette deux dés. Les probabilités d'amener les points 12, 11, 10, 9, 8, 7 *sont respectivement* $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{6}$.

Une urne renferme N *boules dont n blanches, p noires, q rouges. La probabilité d'amener au premier tirage une boule blanche est* $\frac{n}{N}$, *et celle d'en amener une noire ou une rouge,* $\frac{p+q}{N}$.

k urnes renferment chacune p boules blanches et q noires; l autres, chacune r blanches et s noires. La probabilité d'amener une boule blanche, en prenant au hasard dans une urne, est $\frac{kp(r+s)+lr(p+q)}{(k+l)(p+q)(r+s)}$ (Lacroix).

n urnes renferment chacune p boules blanches et q noires. La probabilité de ne tirer que des blanches en tirant une boule de chaque urne est $\left(\frac{p}{p+q}\right)^n$.

Paradoxe de d'Alembert. *La probabilité d'amener face au moins une fois en deux jets d'une pièce de monnaie est* $\frac{3}{4}$. *En général, la probabilité est* $\frac{2^n-1}{2^n}$.

La probabilité d'amener, en un seul jet de six dés, le coup 1, 2, 3, 4, 5, 6 *est* $\frac{6^5}{5!}$ (Montmort).

On a six dés marqués chacun sur une face des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Quelle est la probabilité d'amener en n coups :* 1° *toute la série,* 2° *toutes faces blanches?* (Montucla).

Problème de Méré. *La probabilité d'amener avec un dé au moins une fois un point donné en n jets étant* $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$, *le nombre de jets*

permettant de parier de l'obtenir est $n = \frac{\log 2}{\log 6 - \log 5}$; *de même le nombre de jets qui peut faire parier équitablement pour l'arrivée d'un double donné est égal à* $\frac{\log 2}{\log 36 - \log 35}$. *De là le moyen de connaître en combien de coups on peut espérer de voir les six faces avec un seul dé, ou les six doubles avec deux dés* (Moivre).

On jette n fois en l'air une pièce de monnaie. La probabilité que les piles et les faces alterneront est $\left(\frac{1}{2}\right)^n$; *celle que les coups se succèderont dans un ordre déterminé est* $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Problème des parties. *Partager l'enjeu entre deux joueurs à qui il manque, le premier p parties et le second q parties, pour avoir gagné* (Pascal).

On a un tas de n objets dont on prend une certaine quantité au hasard : la probabilité qu'on en a pris un nombre impair est $\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$ (Bertrand, de Genève).

La probabilité d'un évènement est α. *En p épreuves, la probabilité qu'il se produira q fois, dans un ordre déterminé est* $a = \alpha^q(1-\alpha)^{p-q}$; *celle qu'il se produira q fois dans un ordre quelconque est* $A = C_{p,p-q}a$; *celle qu'il se produira au moins q fois est* $\sum_{q=q}^{q=p} A$; *celle qu'il se produira au moins une fois est* $1 - (1-\alpha)^p$ (Jacques Bernoulli).

La probabilité d'obtenir avec un dé n fois de suite un même point est $\left(\frac{1}{6}\right)^n$; *de même celle d'obtenir avec deux dés n fois de suite le point 7; ou, avec trois dés, n fois de suite le point 5; ou, avec six dés, n fois de suite le point 7* (Montmort).

En jetant n dés au hasard, on a autant de chances d'obtenir un total de points supérieur à $7n + 3$ *qu'on en a d'en obtenir un qui soit inférieur* (id.) Montmort a donné la table des coups de un à neuf dés et celle des coups simples, doubles, etc. ; il s'appuie sur la théorie des combinaisons avec répétitions. Moivre a repris la même recherche,

en y appliquant la considération du développement de la puissance $(a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6)^n$.

La probabilité d'obtenir une fois unique un point donné par n jets d'un dé est $\frac{5^{n-1}n}{6^n}$ (Moivre).

Une urne contient p boules, dont q blanches et le reste noires. On en tire k au hasard : la probabilité qu'elles sont toutes blanches est $\frac{C_{q,k}}{C_{k,p}}$. *La probabilité d'amener k boules blanches puis l noires est* $\frac{C_{q,k}C_{p-q,l}}{C_{p,k+l}}$. Pour $k = 1, 2, 3, \ldots k + l - 1$, on a une suite de probabilités dont la somme doit être l'unité, puisque l'une des hypothèses doit forcément se réaliser. On a ainsi une démonstration du théorème de Vandermonde (Cournot).

On a k billets d'une loterie qui en comprend p ; chaque tirage est de q billets. La probabilité qu'il en sortira r est $\frac{C_{p-k,q-r}C_{k,r}}{C_{p,q}}$ (Euler).

Une première urne contient une boule blanche et p noires ; une deuxième, une blanche et q noires ; une troisième, une blanche et r noires ; ... On tire une boule de la première : si elle n'est pas blanche, on en tire une de la seconde ; si celle-ci n'est pas blanche, on en tire une de la troisième, etc., jusqu'à ce qu'on en trouve une blanche. Quelle probabilité a-t-on de trouver une boule blanche ? (H. Laurent).

n personnes sont assises autour d'une table : quelle probabilité y a-t-il : 1° que deux amis sont à côté l'un de l'autre ? (Garnier) ; *2° que l'une de ces n personnes est entre deux de ses amis ?* (Liagre).

On tire successivement, sans les remettre, n jetons marqués 1, 2, 3, ... n ; la chance R_n *qu'on a de retirer au moins un numéro au rang qu'il occupe dans le tirage est déterminé par les relations*

$$(k + 1)R_{k+1} = kR_k + R_{k-1}, \quad R_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

(Montmort).

Le nombre des combinaisons de n objets dont k ne sont pas à leur place primitive est

$$n!\left(1 - \frac{C_{k,1}}{1!} + \frac{C_{k,2}}{2!} - \dots\right) \qquad \text{(Laplace).}$$

En particulier, *entre les* $P_n = n!$ *permutations et les* Q_n *de celles-ci où aucune n'est à sa place, on a les relations symboliques suivantes :*

$$P^n = (Q+1)^n, \quad Q^n = (P-1)^n \qquad \text{(J. Neuberg).}$$

Q_n *est également le coefficient de* $a_1a_2\dots a_n$ *dans le produit*

$$(a_2 + a_3 + \dots + a_n)(a_1 + a_3 + \dots + a_n)\dots(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$
(Koehler).

On a un tas de jetons marqués 1, 2, 3,... *n*; *on en tire successivement k en les remettant à mesure : la probabilité qu'un numéro est sorti est*

$$1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

et celle que les n numéros le sont tous est

$$1 - C_{n,1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + C_{n,2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k - \dots \qquad \text{(J. Bertrand).}$$

Il peut arriver que le nombre des combinaisons favorables à un certain évènement, quoiqu'infini, soit dans un rapport fini avec le nombre également infini des combinaisons possibles : la probabilité peut alors se calculer. Il suffira de citer les quelques questions suivantes :

Quelles sont les probabilités qu'une pièce de monnaie, tombant sur un carrelage triangulaire, carré,... rencontre une des divisions de ce carrelage? (Buffon).

Quelle est la probabilité qu'une baguette tombant sur un plan divisé par des parallèles équidistantes, rencontre l'une de celles-ci? (id.)

Il y a en moyenne 61 *contre* 39 *à parier que deux nombres quelconques sont premiers entre eux* (Cesàro). Legendre, Gauss, Lejeune-Dirichlet, Liouville, Berger, Cesàro ont donné un grand nombre de propositions de ce genre (¹).

Cette note sera terminée par l'énoncé de quatre questions, en apparence très simples, et qui cependant n'ont pas encore été résolues.

Quel est le minimum des opérations à effectuer pour élever un nombre donné à la n^e *puissance?* (Dellac). Question identique au *problème de Gergonne* (t. I, p. 118).

Combien y a-t-il de manières de placer n carrés égaux se touchant par un, deux ou trois côtés? (Cayley).

De combien de manières peut-on replier une bande ou une feuille de timbres-poste, de manière à ce qu'ils soient tous recouverts par l'un d'eux? (Lemoine).

n hommes et n femmes sont placés alternativement autour d'une table : quelle est la probabilité qu'aucun homme n'est à côté de sa femme? (Ed. Lucas).

On trouvera, dans la *Th. des n.* de ce dernier savant, un grand nombre de questions relatives aux dénombrements, et traitées par les méthodes les plus variées.

Sur les approximations indéfinies. — M. A. Hermann a reproduit, t. II, p. 351, une intéressante application de la méthode d'approximations successives au calcul des racines des équations cu-

(¹) Par exemple, on a *en moyenne*

$$\frac{\sum_1^n \int \alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ (Lej.-Dir.) et } \frac{\sum_1^n \varphi(x)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2} \text{ (Perott)}$$

(Voir Berger, *Application de la fonction gamma* (Upsal, 1880); Cesàro, *Sur div. quest. arith.* (Bruxelles, 1883); id. *Excurs. arith. à l'infini* (Paris. 1885); Berger, *Rech. sur les val. moyennes* (Upsal, 1887); Torelli, op. cit.)

biques. L'idée de cette méthode, dite *de Newton*, est due à Archimède, qui l'a le premier employée dans son calcul du nombre π : ce calcul d'Archimède a du reste reçu de nombreux perfectionnements, comme on le verra plus loin, de Snellius, d'Huygens, de Descartes, de Gregory, de Montucla, de Legendre et de Schwab.

L'extraction de la racine carrée, chez Théon, repose sur des idées analogues.

Chuquet (l. cit.) a enseigné à trouver la même racine au moyen de sa *règle des moyens*, appelée *règle de médiacion* par Estienne de la Roche (*Arismetique*, Lyon 1520) et aujourd'hui *règle des médiantes* (¹).

On voit, dans Buteon (*Opera geometrica*, Lyon, 1554), cette méthode d'approximation de l'insertion de deux moyennes géométriques entre les longueurs a et b : construire un premier parallélipipède dont les dimensions sont a, a, b ; puis, par les procédés de la géométrie élémentaire, un second parallélipipède dont les dimensions sont $a_1 = \sqrt{ab}$, a_1, $b_1 = a$; puis un troisième, dont les dimensions sont $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, a_2, $b_2 = a_1$; et ainsi de suite. Tous ces solides ont même volume, et leurs dimensions tendent vers une limite commune, qui est $\sqrt[3]{a^2 b}$.

L'une des méthodes que propose Neper pour le calcul du logarithme vulgaire du nombre donné a revient à moyenner géométriquement deux limites de a, et arithmétiquement leurs logarithmes. Partant des deux puissances de 10 les plus voisines de a, on arrive ainsi, par des moyennes convenablement choisies, à resserrer de plus en plus le nombre a entre deux limites dont les logarithmes sont connus.

Briggs, entre autres moyens de calculer les logarithmes, a montré

(¹) On sait qu'on appelle *médiante* des deux fractions $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, la fraction $\frac{\alpha + \beta}{a + b}$. Voir pour la méthode de Chuquet, *Ens. Math.* 1906, p. 429.

comment on les obtient en utilisant la formule $n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, où n prend successivement les valeurs 1, 2, 4, 8, 16...

G. de St-Vincent (*Opus geom.* Anvers. 1647), a montré comment, à la limite, on arrivait à la trisection d'un arc AB, en en prenant le milieu C ; puis le milieu D, de l'arc AC ; puis le milieu E, de l'arc DC ; puis le milieu F, de l'arc DE ; puis le milieu G, de l'arc FE, etc.

James Gregory (*Vera circuli et hyp. quad.* Padoue, 1668), fait voir que les termes des deux séries

$$a,\ b,\ c=\frac{a+b}{2},\quad d=\frac{b+c}{2},\ldots$$
$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}=\sqrt{\mathrm{AB}},\quad \mathrm{D}=\sqrt{\mathrm{BC}},\ldots$$

tendent vers les limites $\frac{a+2b}{3}$ et $\sqrt[3]{\mathrm{AB}^2}$. Il montre aussi comment, en prenant alternativement les moyennes géométriques et harmoniques de deux nombres donnés, puis de ces mêmes moyennes, on arrive au logarithme d'un nombre, ou à l'arc correspondant à un sinus déterminés.

La méthode de Newton a été divulguée dans l'*Algebra*, de Wallis (Oxford 1685). Lagny, Rolle et d'autres en ont donné des applications élémentaires au cas du troisième degré.

Dans les *Acta erud.* de 1689, Jacques Bernoulli calcule, par des constructions géométriques successives, les racines des équations $x^3=\mp apx\mp a^2q$, $x^3=a^2b$, $x^5=a^4b$, $x^7=a^6b$. Ces constructions, qu'il a expliquées plus tard, reviennent à la considération des expressions telles que

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}},\qquad \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}},\qquad \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\ldots}}}},$$
$$\sqrt{p\pm\sqrt{p^2-q\sqrt{p\pm\ldots}}}$$

L'Hospital (*Sect. con.* Paris, 1707) a reproduit cette élégante

méthode sous une forme plus correcte, qu'on peut présenter ainsi : *a désignant une première approximation de la racine de l'équation* $x^3 \mp 2px = q$, *posons* $f(x) = \sqrt{\mp p + \sqrt{p^2 + qx}}$, *les valeurs des expressions* $b = f(a)$, $c = f(b)$, $d = f(c)$,... *tendent*[1] *vers la valeur de* x.

Il convient de citer ici la méthode de D. Bernoulli, pour le calcul des racines des équations, basée sur la considération des séries récurrentes. Euler l'a mise dans tout son jour dans son *Introd. in anal. inf.* et elle a été amenée à son entier perfectionnement par Graëf (*Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen*, Zurich, 1837).

Legendre (*Suppl. à la th. des n.* Paris, 1816), appelle *fonction omale* une fonction telle qu'un polynome à coefficients entiers, qui croît ou décroît constamment quand la variable croît de 0 à ∞. Si α est la limite supérieure des racines de l'équation $x^n + fx^{n-1} + \ldots - ax^{n-k} - \ldots + \ldots = 0$, faisons passer tous les termes négatifs dans le second membre et considérons la fonction omale

$$f(x) = \frac{ax^{n-k} + \ldots}{1 + \frac{x}{f} + \ldots};$$

les termes de la suite α, $\alpha' = \sqrt[n]{f(\alpha)}$, $\alpha'' = \sqrt[n]{f(\alpha')}$... tendent vers la valeur de la plus grande racine.

Sarrus (*Ann. de Gergonne*, 1820), a traité la résolution de l'équation cubique, en faisant d'abord remarquer qu'on peut toujours la ramener à l'une des formes $y^3 - 3py \pm q = 0$, $y^3 + 3py \pm q = 0$. Posant, dans le premier cas, $y = \pm 2x\sqrt{p}$, et dans le second, $y = \pm 2\sqrt{p(x^2 - 1)}$, on la ramènera à la forme unique $4x^3 - 3x = a$. Si on écrit :

$$x_k = 2x^2_{k-1} - 1, \qquad 2a^2_k = 1 + a_{k-1},$$

[1] De manière à n'en différer qu'aussi peu qu'on veut.

on aura, en général,

$$4x^3_k - 3x_k = a_k, \qquad \frac{a_k - 1}{a_{k-1} - 1} < \frac{1}{4}.$$

Les termes a_1, a_2,... se rapprochent donc rapidement de la valeur 1. Or comme on a identiquement

$$2x_{k-1} = 1 + \frac{2a_k}{2x_k};$$

il est donc facile de mettre la racine sous forme de fraction continue. Sarrus tire de là une méthode de trisection de l'angle par approximations successives extrêmement rapides.

Cauchy (*Anal. Alg.*) a modifié ainsi l'élégante méthode de Legendre : *soient* $\varphi(x)$ *et* $-\psi(x)$ *l'ensemble des termes positifs et celui des termes négatifs du polynome* $F(x)$; *si* $F(x) = 0$ *a des racines réelles entre a et b, les termes des deux suites*

$$\varphi(a') = \psi(a), \qquad \varphi(a'') = \psi(a'), \ldots$$
$$\varphi(b') = \psi(b), \qquad \varphi(b'') = \psi(b'), \ldots$$

convergent vers la plus petite et la plus grande des racines comprises dans les limites indiquées. On applique cette théorie en ajoutant à chacun des polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, une expression telle que φ devienne de la forme $A(x + B)^n + C$.

Cauchy a donné aussi, en 1836, cet autre procédé encore plus élémentaire, mais peu rapide : *soient* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *l'ensemble des termes positifs et celui des termes négatifs du quotient de* $F(x) - F(a)$ *par* $x - a$; *si on pose*

$$f(x) = -\frac{F(x)}{F(x) - F(b)},$$

les termes de la suite $a' = f(a)$, $a'' = f(a')$..., *tendent vers la plus petite racine comprise entre a et b.*

Les séries, les produits infinis, les intégrales définies, le calcul des

logarithmes (¹) et des fonctions trigonométriques et hyperboliques, certaines approximations géométriques dont il sera parlé plus loin, etc., pourraient apporter de nouvelles contributions à la présente étude ; mais ce qui en a été dit suffit pour montrer l'importance des théories qui y sont rappelées.

Quelques amusettes. — *Dans un bal où il y avait 42 personnes, une dame a dansé avec 7 cavaliers, une seconde avec 8, une troisième avec 9, et ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui a dansé avec tous. Combien de danseurs ? Combien de danseuses ?* La première a dansé avec $6+1$, la deuxième avec $6+2$,... la xe avec $6+x$; d'où $x+(6+x)=42$ et $x=18$.

Pour creuser trois puits de même section a et de profondeurs h, h', h'', on a payé respectivement les sommes s, s', s''. Combien paiera-t-on pour un puits semblable de profondeur h''' ? Soient x la dépense nécessitée pour l'installation des appareils destinés à l'extraction des terres ; y, le prix du piochage de 1 mètre cube de terre ; z, le prix du montage de 1 mètre cube de terre à 1 mètre de hauteur. La hauteur moyenne d'élévation des terres du premier puits est $\frac{1}{2}h$, ce qui fait, pour la dépense de ce même puits

$$x + ahy + \frac{ah^2z}{2} = 1$$

On trouvera de même deux autres équations en x, y, z, qui serviront à déterminer ces trois inconnues, lesquelles mises dans l'expression

$$x + ah'''y + \frac{ah'''^2z}{2}$$

donneront la valeur cherchée.

Cette question rappelle le fameux *problème des bœufs*, de Newton,

(¹) Par exemple les méthodes de Taylor, d'Euler et de Garnier (voir *Enseignement Math.* 1906, p. 428 et seq.)

connu d'ailleurs avant Newton, car, dans ses *Sol. et éclaircis. de qq. prob. de Math.* par Jouvin (Paris, 1658), l'auteur — tout-à-fait ignoré du reste, — en donne un semblable, comme connu en Lorraine depuis plus de quarante ans ; la seule différence est qu'il s'agit de personnes ayant dépensé en un certain temps, une certaine somme et l'intérêt de celle-ci pendant ce temps.

On a n jetons numérotés de 1 *à n et disposés en rond. On enlève le premier puis le deuxième qui le suit, puis le troisième qui suit celui-ci, et ainsi de suite. Quel est le dernier jeton restant?* La solution générale paraît difficile à établir. Voici celles correspondant aux valeurs $n = 1, 2, 3, \ldots 20$:

1, 2, 2, 2, 4, 5, 4, 8, 8, 7, 11, 8, 13, 4, 11, 12, 8, 12, 2, 13,...

On divise une bande de papier en 2^n *parties égales comme ci-dessous ; écrire dans les rectangles ainsi formés au recto et au verso, les* 2^{n+1} *premiers entiers, de manière qu'en la repliant n fois dans le même sens, on ait une brochure exactement paginée.* Les solutions suivantes des cas de $n = 2$, 3, 4, 5, 6 feront aisément comprendre la loi du numérotage, loi qu'il serait probablement difficile de démontrer :

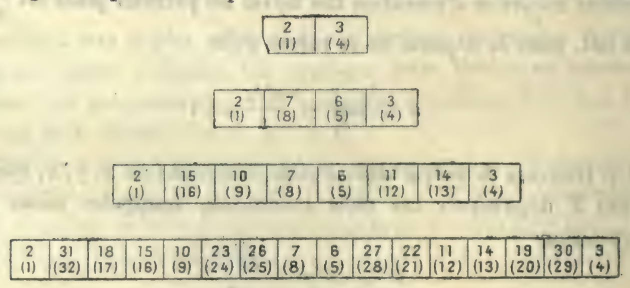


Fig. 22.

les nombres entre parenthèses indiquent les numéros des pages du verso.

La question est beaucoup plus compliquée si la bande est remplacée par une feuille qu'on plie dans les deux sens. Ainsi voici la pagination pour le cas d'un in-8° et pour celui d'un in-16 :

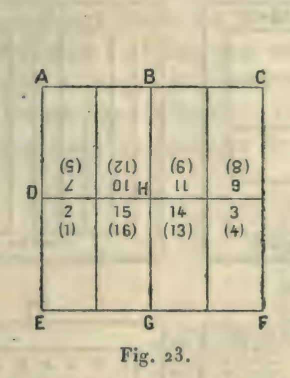


Fig. 23.

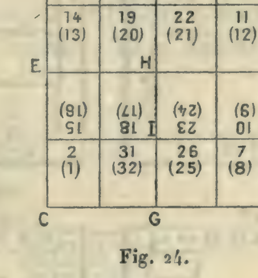


Fig. 24.

Dans le premier cas, on replie CF sur AE, puis AB sur EG et HG sur DE. Dans le second cas, on plie de manière que AB vienne sur CD, puis FD sur EC, EH sur CG et enfin GI sur JC.

On a donné divers moyens de deviner un nombre pensé. Voici un jeu facile à exécuter et qui permet de deviner un nombre jusqu'à 64 : sa théorie est aisée à rétablir et rien n'empêcherait de l'étendre aux 128 premiers entiers.

Il s'agit simplement de découper, comme ci-dessous, six cartons égaux et d'y écrire les numéros indiqués.

Les quatrième et cinquième cartons portent en outre au verso : en haut, 1, 2, 21, 22, 35, 36, 55, 56, et 13, 14, 25, 26, 47, 48 : en bas, 9, 10, 29, 30, 43, 44, 63, 64 et 5, 6, 17, 18, 39, 40, 51, 52.

L'usage de ces cartons est très facile : on demande d'abord si le nombre pensé est pair ou impair, puis s'il surpasse ou non 32 ; on invite alors à voir sur les cartons II, IV et V si le même nombre s'y trouve au recto ou au verso. Tous les cartons où il se trouve sont

alors placés sur le carton VI, dans le sens où le numéro a été lu, et on n'a qu'à le lire sur le carton VI, à travers les quatre grilles [1].

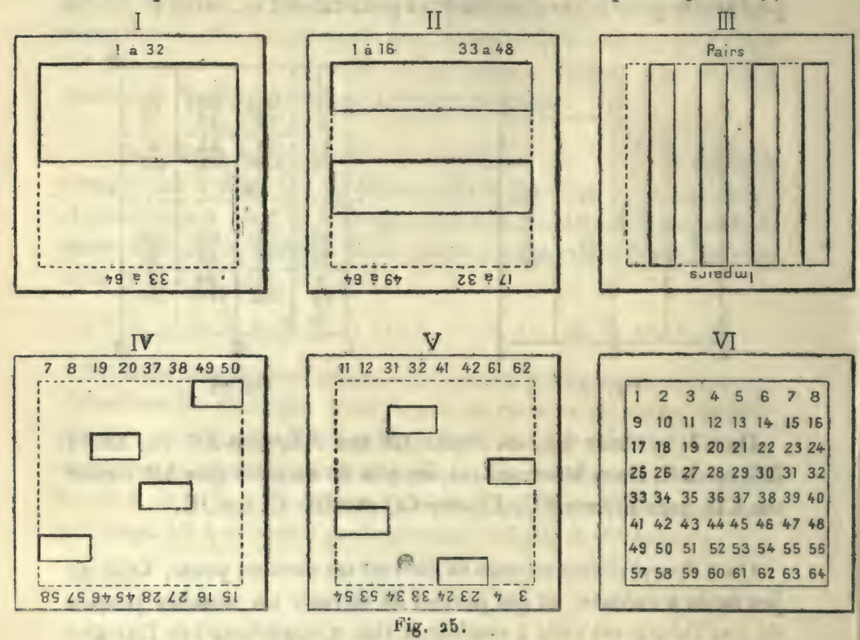


Fig. 25.

Le jeu de Sissa, beaucoup plus savant, permet de deviner un nombre jusqu'à cent, mais il est beaucoup plus compliqué que le précédent et difficile à construire avec précision.

On peut, avec du papier, exécuter un grand nombre de récréations souvent difficiles à mener à terme, quoique très simples en apparence, si on n'a pas la clé.

[1] On rendrait peut-être le jeu plus agréable en n'évidant les figures I et II que sur leur moitié de droite, par exemple, et la figure III, sur sa moitié du haut. Mais alors il faut indiquer les seize numéros au haut et au bas, au recto et au verso, chose facile d'ailleurs, en appliquant chaque grille sur la carte VI.

Par exemple, étant donné une feuille de papier découpée comme ci-dessous, il s'agit de replier les seize bandes extérieures autour des côtés du carré central de manière à présenter les seize associations deux à deux des lettres A, B, C, D avec les lettres *a*, *b*, *c*, *d*; chacune de ces huit lettres se trouvant dans chaque colonne, chaque rangée et chaque diagonale.

On retourne la figure et on rabat les seize bandes dans l'ordre indiqué par les numéros placés à l'extérieur de la figure, et qui

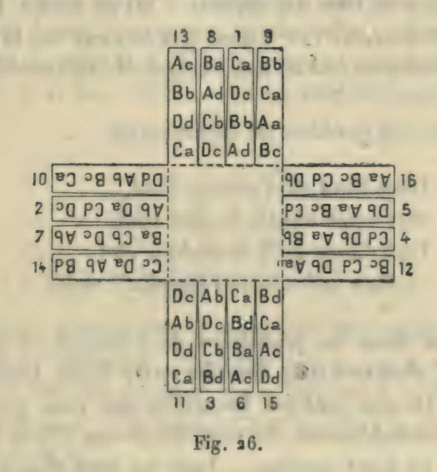


Fig. 26.

pourraient être inscrits au verso.

On pourrait varier cette récréation de plusieurs façons,

Démontrer l'impossibilité que présente la conclusion de cette épitaphe-énigme du moyen-âge :

« Ci-gît le fils avec la mère ;
Ci-gît la fille avec le père ;
Ci-gît la sœur avec le frère ;
Ci-gît la femme et le mari ;
Et ne sont que trois corps ici. »

On peut supprimer le premier vers, car même avec cette condition en moins, l'impossibilité n'en subsistera pas moins. Ceci posé, on a deux cas à examiner : un seul homme ou une seule femme, et chacun de ces deux cas se subdivise également en deux autres.

1° Le mari A de l'une B des défuntes est en même temps le père (ou le frère) de l'autre C. Or A n'est pas le frère (ou le père) de sa femme B, ni de sa fille (ou de sa sœur) C. Ces deux cas sont donc impossibles.

2° La femme *a* de l'un des défunts *b* est en même temps la fille (ou la sœur) de l'autre *c* ; or *a* n'est pas la sœur (ou la fille) de son mari *b* ni de son père (ou de son frère) *c*. Même conclusion.

Voici encore une question du même genre :

« Diese kind sind unsere kind,
Ihre vater unsere bruder sind,
Und dieses doch in rechter eh !
— Nun rathe wie di sipschafft steh ? »

qu'on retrouve dans les problèmes de Chuquet : « Ilz sont deux femmes ayant chascune ung beaufilz entre leurs braz. Ausquelles fut demandé. De qui sont ces beaulxfilz que vous portez. Et elles respondirent veritablement. Ilz sont filz de nos filz et freres de nos maryz et tout en loyal mariage... Jadiz ces deux fẽmes qui en riens ne se apptenoient furent maryees et chascune eust ung filz. Et au chef dung temps leurs maryz furẽt trespassez et leurs enffans grans. Puis prindrent a mary lenffant lune de laultre. Desquelz elles eurent les deux filz dessus dits qui filz estoient de leurs filz et frẽs de leurs marys. »

Utilisation de jetons pour la solution de certains problèmes. — On peut, avec n jetons numérotés de 1 à n, se poser de nombreux problèmes, dont la solution, souvent difficile, dépend de la théorie élémentaire des nombres. Réciproquement, l'emploi de jetons peut,

en les objectivant, aider à la solution de certaines questions numériques.

Par exemple, ayant placé les n jetons en ligne dans l'ordre naturel, on met le n^e à gauche du premier, le $(n - 1)^e$ immédiatement après le premier, le $(n - 2)^e$ après le 2e, etc. On a ainsi (voir Prompt, *Rem. sur le th. de Fermat*, Grenoble 1905), la *sextine*

$$n, 1, n - 1, 2, n - 2, 3, n - 3, \ldots$$

Opérant de même sur cette suite, on a une deuxième sextine, et ainsi de suite. Après un certain nombre d'opérations semblables, on retrouvera la suite 1, 2, 3,... n, comme transformée de la dernière sextine 2, 4, 6,... 5, 3, 1. Voici à titre d'exemple les sextines de 7,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
7, 1, 6, 2, 5, 3, 4
4, 7, 3, 1, 5, 6, 2
2, 4, 6, 7, 5, 3, 1

Une première question est de savoir quel est le nombre de sextines que demande le nombre n : il est égal à $k + 1$ si $n = 2^k$; et égal à n, si n est un nombre premier ainsi que $2n + 1$. Mais généralement il est moindre ; d'ailleurs voici ce nombre pour les seize premières valeurs de n,

1, 2, 3, 3, 5, 6, 4, 4, 9, 6, 11, 10, 9, 14, 5, 15

Le tableau des sextines étant construit, on peut se proposer de trouver la place d'un nombre donné dans les diverses sextines, chose assez facile ; d'étudier les cycles que présentent les termes de la k^e colonne [1] ; de définir ceux de un, de deux,... termes. L'intéressant opuscule cité plus haut étudie beaucoup de questions de ce

[1] Les cycles correspondant à 7 sont 1, 7, 4, 2 ; 3, 6 et 5.

genre, et montre le parti considérable qu'on peut ainsi tirer de cette théorie dans certaines applications du théorème de Fermat.

On aurait un autre sujet d'étude en procédant ainsi : tenant le paquet de jetons dans une main, on met le premier sur la table, le deuxième sous le paquet, le troisième sur celui qu'on a déjà retiré, le quatrième sous le paquet, et ainsi de suite. On a ainsi une transformée, dont on déduit de la même manière [1], une seconde, et de là une troisième,... jusqu'à ce qu'on retrouve la série primitive 1, 2, 3,... n. La théorie est plus difficile que la précédente ; aussi on se contentera de donner le nombre a de transformées, et celui b des périodes composant les n colonnes, n variant de 1 à 16.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	1	1	3	4	5	6	5	4	6	6	15	12	12	30	15	12
b	1	1	1	2	1	1	3	3	3	3	10	12	5	3	1	7

[1] La connaissance de la première transformée suffit : sous le terme k de celle-ci, on met le terme qui est sous le terme k de la suite proposée 1, 2, 3,... k,... n. Et ainsi de même pour les autres.

GÉOMÉTRIE

—

La Géométrie était sortie si parfaite des mains d'Euclide que longtemps on n'osa toucher à cette belle production du génie grec. Encore aujourd'hui, les livres qui en traitent portent la forte empreinte du grand géomètre qui lui a donné sa forme définitive. Ce n'est pas ici le lieu d'exposer même une faible partie de ce qui a été proposé pour mieux l'adapter aux conceptions mathématiques modernes ; on parlera seulement de certains à-côté dont les traités ne s'occupent guère, comme dans la crainte de lui voir perdre son caractère hiératique. On peut croire cependant qu'avec moins de problèmes difficiles et quelques unes de ces applications générales en plus, les traités seraient plus intéressants et amèneraient à la science de nouveaux adeptes.

On se plaint de l'impopularité des mathématiques : ne serait-ce pas là l'effet de cette habitude de n'écrire que pour les professionnels et les candidats aux examens, tandis qu'aucun livre n'est destiné au simple amateur, qui ne veut pas approfondir la vaste science actuelle, comme cela pouvait se faire de la science peu étendue des Grecs. Tout le monde apprend la Géométrie et combien la savent ? Qu'on la rende attrayante, en l'objectivant davantage, pour ceux qui n'en veulent pas faire une étude particulière ; qu'on y joigne des récréations et des notes historiques, et elle se popularisera en devenant un passe-temps agréable, au lieu de rester un devoir rigide qu'on délaisse dès la sortie du lycée.

Les notes qui vont suivre tendent à fournir une contribution à l'exécution du programme dont il vient d'être parlé : on y traite

des applications élémentaires de la Géométrie à d'autres parties de la science ; puis ce qu'on pourrait appeler la *géométrie abstractive*, où on fait abstraction de certaines propriétés des figures ; enfin de la géométrie des courbes.

Géométrisation de l'arithmétique et de l'algébre. — Chez les Anciens ce sujet était déjà assez développé : il suffira de rappeler les nombres en triangles, les progressions arithmétiques, les nombres figurés, les nombres polygones, les nombres irrationnels. Euclide, et après lui, tout le Moyen-Age, ont traité géométriquement toute l'arithmétique théorique. Diophante, puis les Indiens, ont tiré de la géométrie de fort beaux problèmes d'arithmétique.

Mais c'est chez les Modernes qu'on voit les applications les plus générales de ces considérations ; on peut citer : Oresme, qui le premier a nettement indiqué la figuration géométrique des fonctions et indiqué la propriété fondamentale du maximum qui a donné naissance au calcul différentiel ; — Albert Girard, qui a montré à interpréter les nombres négatifs ; Descartes, qui a créé la géométrie analytique ; — l'explication des imaginaires (Külm, Wessel, Argand, etc.) ; — la représentation des formes quadratiques par Gauss, et des fonctions analytiques par Riemann ; — et une foule d'applications de l'intuition géométrique à la recherche des vérités arithmétiques et analytiques, recherches poursuivies par les plus grands géomètres du dernier siècle.

Il sera seulement question ici de la démonstration très simple, donnée par Eisenstein, de deux importants lemmes arithmétiques de Gauss [1].

Soient a et b deux entiers impairs premiers entre eux ; construi-

[1] On pourra étudier les questions faisant l'objet de la présente note dans divers mémoires et opuscules de M. Minkowski, sur la *Geometrie der Zahlen*, et, — dans un cadre plus élémentaire, — ceux de MM. Tarry et Arnoux sur l'*Arithmétique graphique*.

sons un parallélogramme (fig. 27) sur ces deux nombres, menons une diagonale, et traçons le quadrillage correspondant aux divi-

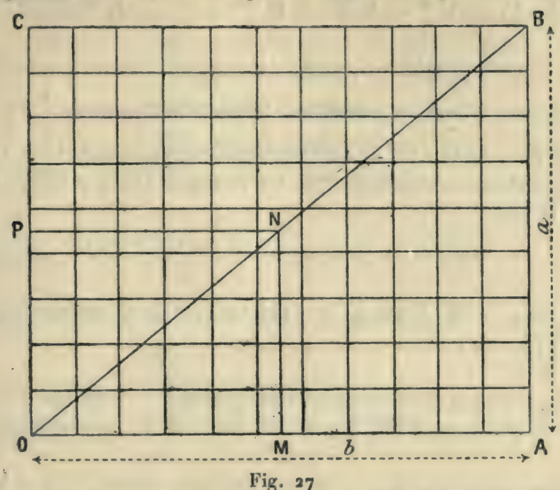


Fig. 27

sions des côtés. Le nombre des intersections de la k^e ordonnée entre la base et la diagonale est $E\frac{ka}{b}$. Il ne se trouve aucune intersection sur la diagonale, on a donc :

$$E\frac{ka}{b} + E\frac{(b-k)a}{b} = a - 1, \text{ nombre pair.}$$

et par suite

$E\frac{a}{b}$	est de la même parité que		$E\frac{(b-1)a}{b}$
$E\frac{2a}{b}$	»	»	$E\frac{2a}{b}$
$E\frac{3a}{b}$	»	»	$E\frac{(b-2)a}{b}$
$E\frac{4a}{b}$	»	»	$E\frac{4a}{b}$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$E\frac{(b-1)a}{2b}$	»	»	$E\frac{(b\pm 1)a}{2b}$

suivant que b est de la forme $4h \mp 1$. Posant

$$f(a, b) = \text{E}\,\frac{a}{b} + \text{E}\,\frac{2a}{b} + \text{E}\,\frac{3a}{b} + \ldots + \text{E}\,\frac{(b-1)a}{2b},$$

on voit d'après le tableau précédent que $f(a, b)$ est de même parité que $f(2a, b)$. Or si on construit le parallélogramme $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, on voit que $f(a, b)$ et $f(b, a)$ représentent respectivement les nombres des intersections comprises dans les triangles ONM et ONP. On conclut de là que

$$f(a, b) + f(b, a) = \frac{(a-1)(b-1)}{4}$$

et que par suite $f(2a, b) + f(2b, a)$ est de la même parité que $\frac{(a-1)(b-1)}{4}$.

Cayley a rendu cette démonstration tout à fait directe en y introduisant la distinction des lignes d'ordre pair du quadrillage.

Section angulaire. — Cette élégante théorie, due à Viéte, (*Canon Mathematicus*, Paris, 1579), consiste dans la recherche des équations de la division d'un arc en parties égales.

Voici trois des principaux théorèmes de Viète.

Considérons les arcs égaux AB, MN, NP (fig. 28) ; joignons X

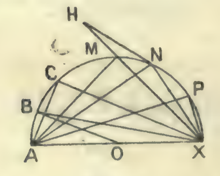


Fig. 28

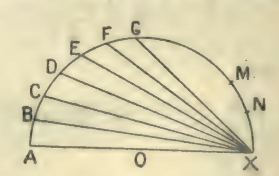


Fig. 29

aux points B, M, N, P et prenons sur MX le point H tel que NH = NX. Les triangles NHX, BOX sont semblables, et de plus HM = PX ; d'où en posant OX = 1, BX = x,

(α) $\qquad$ $PX = x.NX - MX$

(β) $\qquad$ $AP = x.AN - AM$

Soient donc les arcs égaux AB, BC, CD, DE, EF, FG,... (fig. 29) on a d'après (α)

$$\begin{aligned} CX &= x^2 - 2 \\ DX &= x^3 - 3x \\ EX &= x^4 - 4x^2 + 2 \\ FX &= x^5 - 5x^3 + 5x \\ GX &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et d'après (β)

$$\begin{aligned} AD &= x^2 - 1 \\ AE &= x^3 - 2x \\ AF &= x^4 - 3x^2 + 1 \\ AG &= x^5 - 4x^3 + 3x \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Prenons sur la circonférence AX, les arcs égaux AB, DE, EF, FG, XZ (fig. 30), et joignons ZE, GA. On a NZ = GZ = XF, EZ = XD, et les triangles ABO, EAN sont semblables. De là, en posant BO = 1, BA = x, le tableau suivant

$$\begin{aligned} CX &= 2 - x^2 \\ DA &= 3x - x^3 \\ EX &= 2 - 4x^2 + x^4 \\ FA &= 5x - 5x^3 + x^5 \\ GX &= 2 - 9x^2 + 6x^4 - x^6 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Viète explique la loi de formation de ces coefficients à la manière des nombres figurés.

Briggs (*Arithmetica logarithmica*, Londres 1624), a calculé les

côtés de l'heptagone et de l'ennéagone réguliers. Voici pour le premier : dans la fig. 31, facile à expliquer, on a

$$ab : bc : bd : de = ho, \qquad ab + ho = ao + hd + bd$$

d'où, en posant $ab = 1$, $bc = x$, la relation $1 + x^3 = 2x + x^2$.

Dans sa *Trigonometria britannica* (Goude, 1633), il déduit les formules de la trisection, de la quintisection et de la septisection, de la considération des triangles semblables fournis par les fig. 32 et 33.

Fig. 30

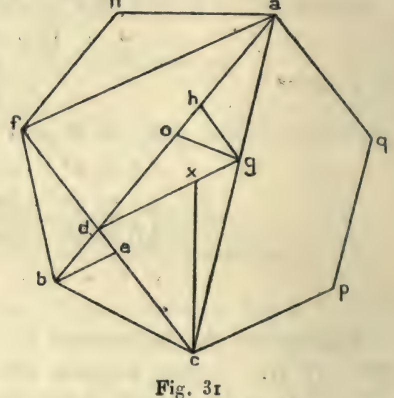


Fig. 31

On doit à Newton (*lettre à Oldenbourg*, 1676, et *Arith. univ.*) une démonstration très simple des formules de Viète. Soit un angle A,

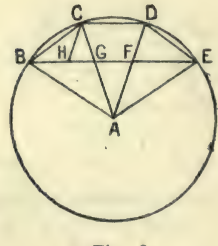


Fig. 32

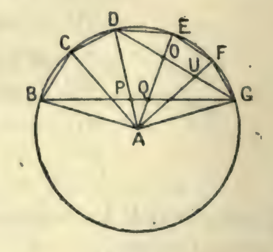


Fig. 33

suffisamment aigu (fig. 34). Prenons successivement AB = BC

$= CD = DE = \dots$ Les triangles semblables ABK, ACL, ADM, AEN,... donnent les relations

$$\begin{aligned} BL &= x^2 - 2 \\ CM &= x^3 - 3x \\ DN &= x^4 - 4x^2 + 2 \\ EO &= x^5 - 5x^3 + 5x \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Le géomètre arabe Aboul-Djoud avait employé un cas particulier

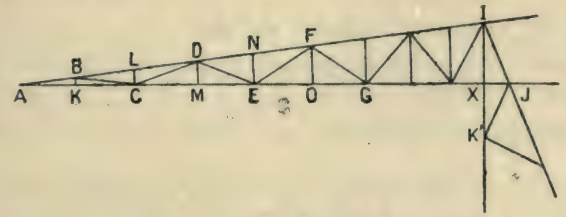


Fig. 34

de cette figure pour démontrer la relation existant entre les côtés de l'hexagone et de l'ennéagone réguliers.

Collignon (A. F. *Congrès de Blois*, 1884), a montré comment on peut utiliser le principe de cette figure pour mesurer un angle, par approximations successives ; on inscrit dans l'angle donné les segments égaux AB, BC, CD,... autant que cela se peut, soit n fois. Soit IJ le dernier segment inscrit : on agira de même sur l'angle XIJ, dans lequel peuvent s'inscrire n' segments égaux IJ, JK,... ; et ainsi de suite : l'angle donné a pour valeur

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{nn'} + \frac{1}{nn'n''} - \dots\right)$$

Jacques Bernoulli a donné, dans les *Mém. de l'Ac. des sc.* pour 1702, une ingénieuse démonstration des formules de Viète ; mais elle est beaucoup moins simple que les précédentes, et pour ce motif elle ne sera pas reproduite ici.

Dans son *Traité anal. des sect. con.* (Paris, 1707), le marquis de l'Hospital a recherché de cette manière les équations déterminant l'inscription des polygones réguliers. Soient les arcs égaux AK, AB, BC, CD,... (fig. 35) ; on a :

$$\mathrm{CX} = zx - x, \qquad \mathrm{EX} = z.\mathrm{CX} - \mathrm{BX} = z^2x - zx - x$$

et en général

$$\mathrm{NX} = xz^n - xz^{n-1} - (n-1)xz^{n-2} + \ldots$$

Pour NX = 0, on a l'équation cherchée

$$z^n - z^{n-1} - (n-1)z^{n-2} + \ldots = 0$$

Par exemple, les équations,

$$z - 1 = 0,$$
$$z^2 - z - 1 = 0,$$
$$z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0,$$
$$z^4 - z^3 - 3z^2 + 2z + 1 = 0,$$
$$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 3z - 1 = 0$$

— dont chacune s'obtient en multipliant le premier membre de la

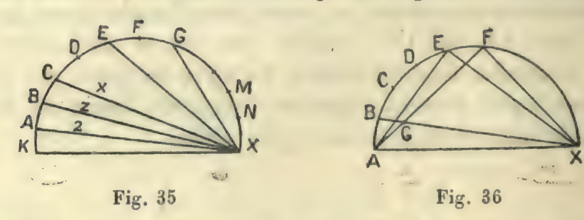


Fig. 35 Fig. 36

précédente par z et retranchant de l'antéprécédente, — servent à inscrire les polygones réguliers de 3, 5, 7, 9 et 11 côtés.

L'Hospital a donné aussi ce théorème ; soient les arcs égaux AB, EF (fig. 36). Appelons 1, x, y, z, v les longueurs AX, AB, BX,

AE, EX. A cause des triangles semblables, ABG, AEX, XFG, on a :

$$v.\mathrm{GX} = yv - xz, \qquad \mathrm{FX} = vy - xz, \qquad \mathrm{AF} = yz + vx$$

Donc, si on forme les deux suites A, B, C, D,... et a, b, c, d,... telles qu'on ait :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A} = y, & a = x \\ \mathrm{B} = \mathrm{A}y - ax, & b = \mathrm{A}x + ay \\ \mathrm{C} = \mathrm{B}y - bx, & c = \mathrm{B}x + by \\ \mathrm{D} = \mathrm{C}y - cx, & d = \mathrm{C}x + cy \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

les expressions B, C,... représenteront les cordes CX, DX,... et b, c,... les cordes CA, DA,... et de là, on tirera facilement les expressions générales déjà trouvées.

Le but de Viète était de faciliter la construction des tables trigonométriques. Un coup d'œil sur l'histoire de cet important sujet en fera sentir toute l'utilité, en dehors de son intérêt propre.

La première table trigonométrique parvenue jusqu'à nous se trouve dans l'*Almageste*, de Ptolémée, qui emploie, pour la calculer, une méthode due probablement à Hipparque. Elle est basée sur le théorème célèbre qui porte son nom : *le rectangle* (produit) *des diagonales d'un quadrilatère inscrit est égal à la somme des rectangles des côtés opposés*, théorème qui, suivant la remarque de Carnot, contient toute la trigonométrie rectiligne.

Ptolémée en tire le moyen de trouver la corde de la somme ou de la différence de deux arcs déterminés par leurs cordes, ainsi que celle de la moitié d'un arc donné.

De la connaissance des cordes de 30° et de 36°, on tire celles des arcs de 3°, 1°30′, 45′! Pour tirer de là la corde de 30′, il démontre que *de deux cordes, la plus grande est à l'autre en moindre rapport que les arcs correspondants*. On a ainsi :

$$\frac{2}{3}\text{ corde } 1°30' < \text{corde } 1° < \frac{4}{3}\text{ corde } 45'$$

Ptolémée prend pour la valeur de la corde de 1°, la partie commune aux valeurs de ses deux limites, et construit d'après cela sa table des cordes de 30′ en 30′.

C'est Aryabhatta qui paraît l'inventeur de l'emploi des différences secondes dans le calcul des tables : il a calculé ainsi une table de sinus de 3°45′ en 3°45′.

Ouloug-Beg a donné de nouvelles méthodes de calcul du sinus de 1°.

Connaissant les sinus de 3° et de 45′, on en tirera ceux de 3°45′ et de 2°15′ puis ceux de $a = 56'15''$ et de $b = 1°7'30''$. Or la différence des sinus de 1° et de a est plus petite que le tiers de celle des sinus de a et de 45′ ; on peut donc écrire

$$\sin 1^\circ < \frac{4}{3} \sin a - \frac{1}{3} \sin 45'$$

On a de même :

$$\sin 1^\circ > \sin a + \frac{1}{3} (\sin b - \sin a).$$

On a obtenu ainsi deux limites très rapprochées de sin 1°.

Dans une seconde méthode, il part de la relation $3 \sin 1^\circ = \sin 3^\circ + 4 \sin^3 1^\circ$ et pose d'abord $\sin 1^\circ = \frac{\sin 3^\circ}{3}$. Introduisant cette valeur dans l'équation primitive, il obtient une seconde approximation, et ainsi de suite.

Rheticus a travaillé toute sa vie à ses grandes tables à quinze décimales terminées et publiées en 1596 par Pitiscus, sous le nom d'*Opus palatinum*. L'argument varie de 10″ en 10″. On jugera, par ce qui suit, de l'immensité des calculs entrepris par lui.

Des sinus de 36°, de 30° et de 45°, il tire ceux de 84°, 42°, 21°,

69°, 34°30′, 22°30′, 67°30′, 33°45′. De là, celui de $\frac{1}{2}$ (34°30′ + 33°45′) ou de 34°7′30″, puis ceux de 3°, 1°30′, 45′. Il construit une première table de 45′ en 45′, qui servira de vérification.

Par des bissections de l'angle de 45′, il arrive à la connaissance des sinus d'une série d'angles, lesquels convenablement combinés, lui donnent le sinus de 29″59‴33⁗37′′′′′58′′′′′′7′′′′′′′30′′′′′′′′, d'où, par proportion, le sinus de 30″.

Comme vérification, des sinus de 34°7′30″ et de 30″, il tire celui de 34°8′, d'où successivement ceux de 17°4′, 8°32′, 4°16′, 2°8′, 1°4′, 32′, 16′, 8′, 2′, 1′, 30″.

Par des moyens analogues il calcule sin 5° : il peut alors construire sa table. Il la vérifie du reste à mesure à l'aide des différences premières, secondes et troisièmes.

Viète avait procédé ainsi pour la construction de son *Canon* : par la quintisection de l'angle de 18°, il avait le sinus de 3°36′ ; par deux trisections et une bisection de l'angle de 60°, celui de 3°20′ ; de là les sinus de 16′, 8′, 4′, 2′ et 1′.

Par des moyens de même nature, Bürgi avait calculé les sinus de 15°, 3°, 1°, 30′, 10′, 5′, 1′30″, 30″, 10″, 5″, 1″. Briggs a donné la théorie de ces méthodes et enseigné à résoudre les équations auxquelles elles conduisent, par le procédé des approximations successives.

Sur les applications de la géométrie à la mécanique [1]. — Ces deux sciences se sont de tout temps prêté un mutuel appui. Archytas a écrit, paraît-il, sur les relations qu'elles ont entre elles ; Aristote a envisagé plusieurs problèmes dans ce genre. Mais il faut

[1] Il y aurait un ample et instructif recueil à faire des curiosités de la mécanique, ses appareils, ses démonstrations, ses problèmes, ses hypothèses, ses théories, ses méthodes et ses applications. Mais ce travail, pour être convenablement traité, dépasserait les bornes d'une simple note.

arriver à Archimède pour voir les premières questions mécaniques traitées scientifiquement : on lui doit la si importante notion du centre de gravité des figures planes et des solides, qu'il a appliquée au triangle, au parallélogramme, au trapèze, au segment parabolique et au paraboloïde de révolution. C'est par son moyen qu'il est arrivé à sa belle découverte de la quadrature de la parabole, la première et longtemps la seule courbe qu'on ait connue absolument quarrable. Un autre monument de son génie est l'application qu'il a faite de son principe d'hydrostatique à la recherche de l'équilibre du paraboloïde flottant.

Apollonius a donné, du centre de gravité de plusieurs points, une propriété générale très remarquable : ce point est tel que la somme des carrés de ses distances aux points en question est un minimum.

C'est à Pappus que sont dus les deux théorèmes dits de Guldin et relatifs aux aires et aux volumes produits par une ligne ou une surface tournant autour d'un axe fixe.

Il y a ensuite à citer dans le domaine élémentaire : Stevin, qui imagine le *parallélogramme des forces* seulement entrevu par Aristote, et le *polygone funiculaire* ; — Lucas Valerius, à qui est due la notion de *moment* ; — Descartes (1), qui inaugure la théorie du centre instantané de rotation, en cherchant le tracé de la tangente à la cycloïde ; — Roberval et Toricelli, qui, à propos de la même question, créent celle des mouvements composés ; — Mersenne, qui pose le fameux problème du *centre d'oscillation* (2), résolu par

(1) Par une réaction exagérée contre la doctrine péripatéticienne de la qualité, Descartes n'admet plus que la quantité : la mécanique n'est plus qu'une application de la géométrie, qui ne peut cependant représenter le mouvement que par les différents aspects d'une même figure. Sa géométrie elle-même n'est plus que la science des distances entre les points d'une figure, dont la forme est indifférente. Mais ce n'est pas le lieu de parler ici des conceptions de l'illustre philosophe sur ce sujet.

(2) C'est le point où il faudrait condenser les masses de deux pendules pour que la masse unique oscille de la même manière que le pendule composé de ces masses liées invariablement.

Huygens ; — Huygens, qui figure les moments d'une surface par un *onglet* et crée la théorie du *moment d'inertie* [1] ; — enfin Varignon, qui, dans sa *Nouv. méc.* (Paris, 1687), traite spécialement de la composition des forces.

Les idées de ce dernier ont donné naissance, à la suite des travaux de Monge, de Poncelet, de Maxwell, de Culmann et de Cremona, à une science nouvelle, la *statique graphique*, qui se prête avec la plus grande facilité à la solution des problèmes pouvant se ramener à la statique plane. On en dira quelques mots.

Plusieurs forces étant en équilibre autour d'un point, on peut construire un polygone dont les côtés sont parallèles à la direction de ces forces et proportionnels à leur intensité. Dans le cas de trois forces dont une est connue, comme direction et intensité, et les deux autres comme direction seulement, la construction du *triangle* des forces déterminera également les intensités inconnues.

Par exemple, soit un fil ABCDE (fig. 37) attaché par ses extré-

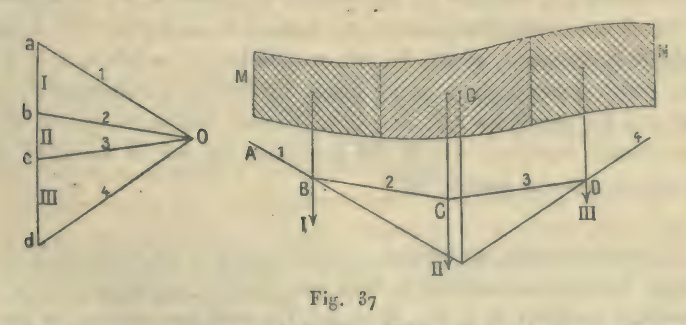


Fig. 37

mités et supportant des poids I, II et III en des points déterminés. On porte sur la même verticale les longueurs *ab*, *bc*, *cd* représentant, à une certaine échelle, les poids donnés ; on mène des paral-

[1] C'est l'expression $\int y^2 dx$; son nom est dû à Euler. La considération du moment d'inertie est d'un grand usage dans la dynamique.

lèles *ao*, *bo*, à AB et à BC : pour qu'il y ait équilibre, *oc* et *od* doivent être parallèles à CD et DE.

La ligne brisée ABCDE est un polygone funiculaire ; on emploie beaucoup ce genre de construction dans les recherches de résistance de matériaux. On indiquera seulement comment il peut servir à trouver le centre de gravité d'une surface MN : on la décompose, par des parallèles, en surfaces assez petites pour qu'on puisse en

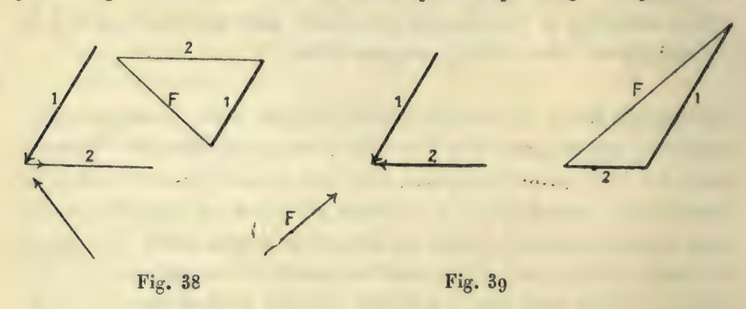


Fig. 38 Fig. 39

déterminer les surfaces et les centres de gravité ; on appliquera celles-là aux verticales passant par ceux-ci et on les portera à une échelle quelconque, en *ab*, *bc*, *cd* ; on joindra les points *a*, *b*, *c*, *d* à un point quelconque *o*, et du point également quelconque A, on mènera les parallèles AB, BC, CD, DE aux droites *ao*, *bo*, *co*, *do* : les droites extrêmes AB et DE se couperont sur la verticale du centre de gravité cherché G.

Une application également très intéressante est celle de la statique des systèmes articulés. Soit une force F appliquée au *nœud* des deux barres 1 et 2 (fig. 38 et 39). On voit que, suivant la position de la force F, les deux barres sont ou toutes deux comprimées, ou l'une comprimée et l'autre tendue : les premières s'indiquent par de gros traits, les secondes par des traits fins. Connaissant l'effort subi par chaque barre, on pourra déterminer sa section de manière que la compression ou la traction, par unité de surface, ne dépasse pas le taux prescrit.

La fig. 40 indique suffisamment le calcul des efforts dans une *poutre armée*, dont les extrémités reposent sur deux appuis horizontaux. Les forces R, R′ sont les *réactions* verticales des appuis. Si le sommet de la poutre était en bas, le sens des efforts serait partout changé.

La fig. 41 représente une poutre semblable chargée au haut et

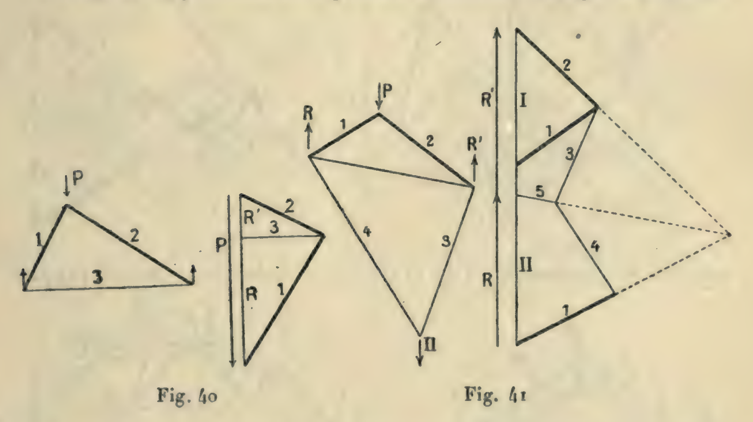


Fig. 40

Fig. 41

au bas. Suivant la forme de la poutre et les intensités des poids, les pièces comprimées peuvent être au-dessus ou au-dessous.

Autre étude (fig. 42). Les barres comprimées seraient à la partie supérieure, si le poids P y était lui-même.

Généralement les constructions sont symétriques, ainsi que les charges, ce qui facilite le calcul. Ainsi pour la *ferme* (fig. 43) ([1]), on supposera que le nœud supérieur est articulé et qu'il supporte la moitié de la charge totale, l'autre moitié étant supportée par les appuis des extrémités. On part d'un nœud de deux barres et on décompose successivement, aux nœuds suivants, les forces à mesure qu'on les connaît.

([1]) On a un cas particulier de ce type fréquemment employé, celui où la barre 4 est supprimée, 3 et 3′ étant réunies en une barre unique verticale.

Le plus souvent, il y a plusieurs nœuds où on concentre tout le

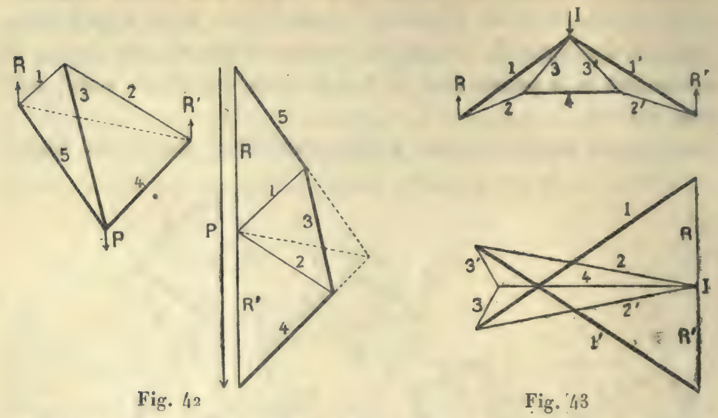


Fig. 42 Fig. 43

poids de la charpente et de la charge éventuelle de neige jusqu'à

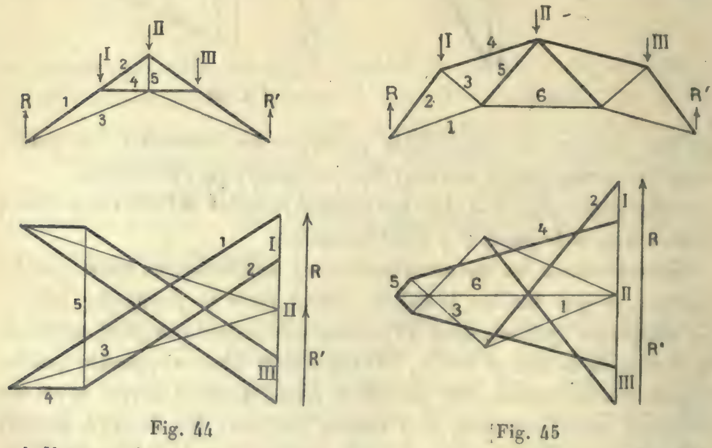


Fig. 44 Fig. 45

mi-distance des nœuds voisins. On a ainsi, le *type suisse* (fig. 44), les *mansardés* (fig. 45 et 46), les *Polonceaux à deux bielles* (1)

(1) Supprimant la barre 6 et réunissant en une seule barre verticale les deux barres 5 et 5', on a une ferme très souvent employée.

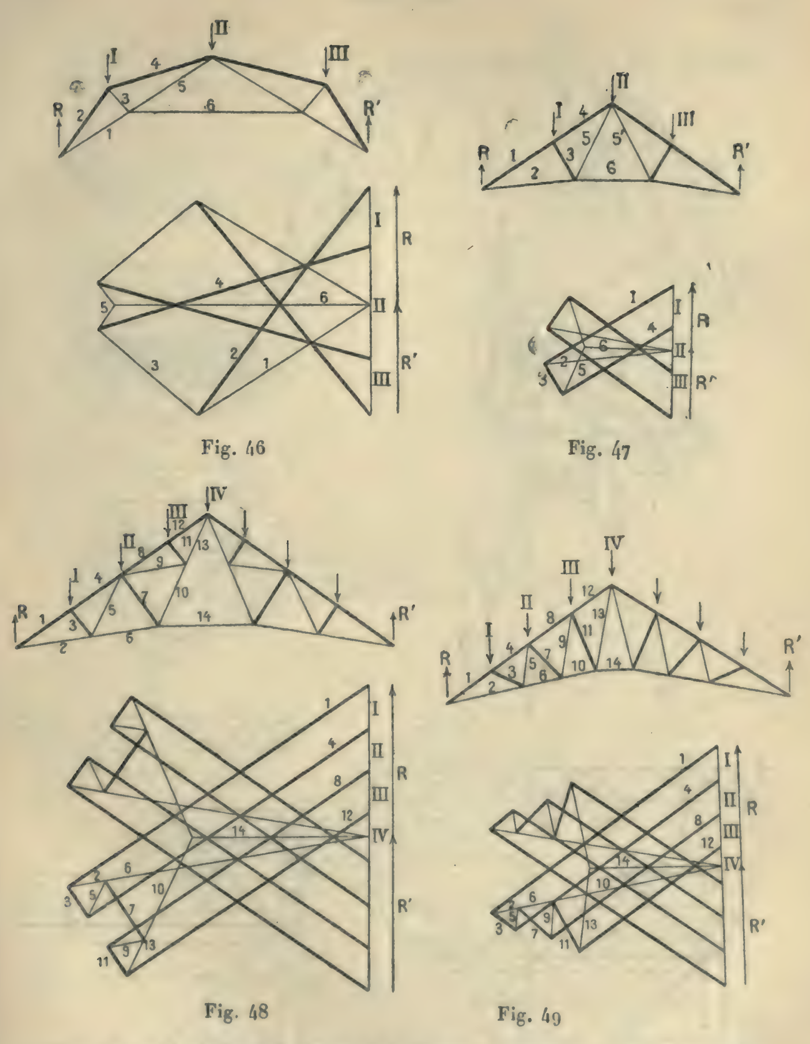


Fig. 46

Fig. 47

Fig. 48

Fig. 49

(fig. 47) et *à six bielles* (fig. 48), le *type belge* (fig. 49), le *comble*

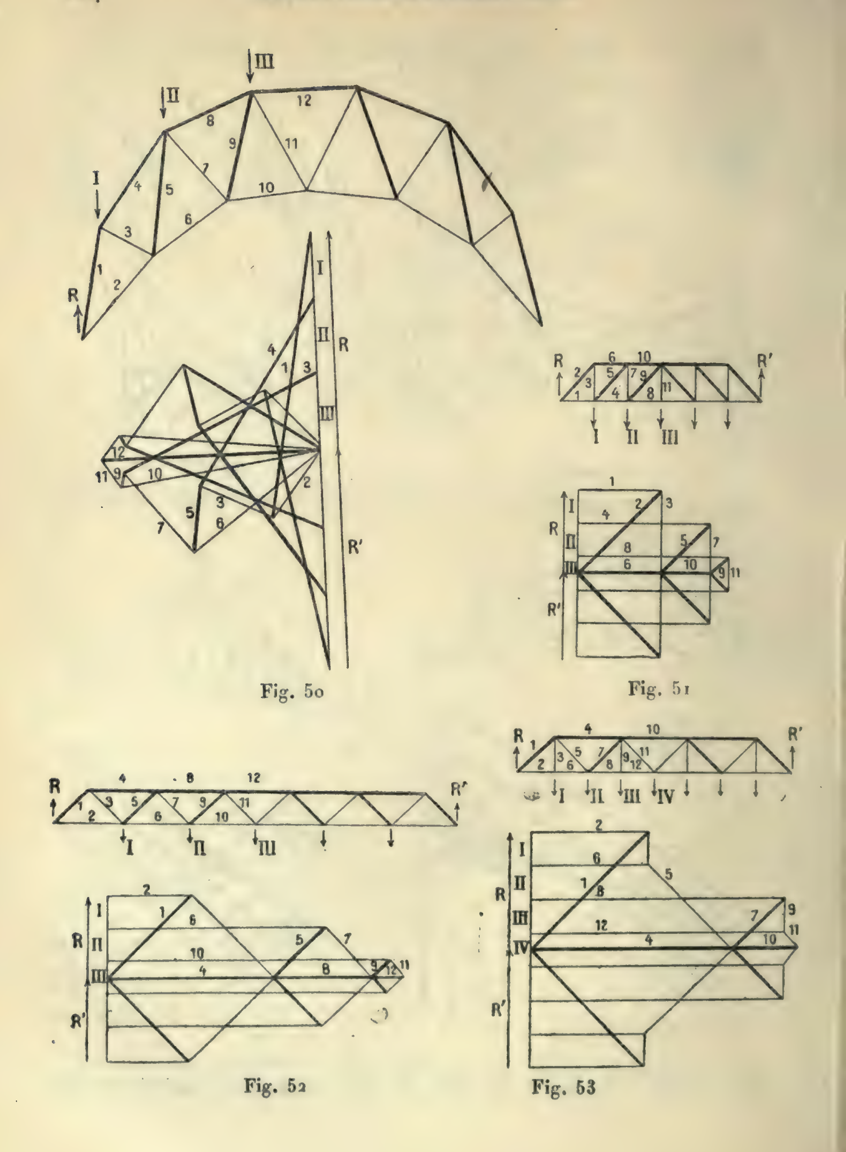


Fig. 50

Fig. 51

Fig. 52

Fig. 53

(fig. 50), les *poutres Howe* (¹) (fig. 51), *Warren* (fig. 52), *Neuville* (fig. 53), *parabolique* (fig. 54) et le *bow-string* (fig. 55).

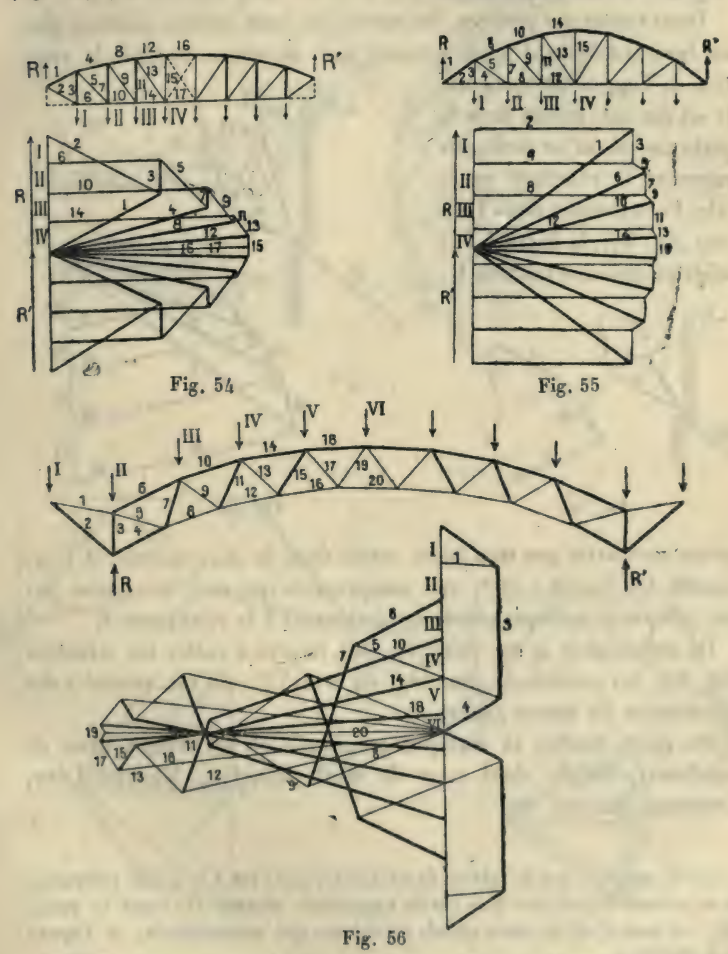


Fig. 54

Fig. 55

Fig. 56

(¹) Cette poutre renversée, donne la *poutre Pratt*, qui a ses barres verticales comprimées et ses barres inclinées tendues.

La poutre se continue quelquefois au-delà des appuis : les épures prennent alors une forme particulière, dont la ferme à *cantilever* (fig. 56) donne un exemple.

Dans toutes ces poutres, les extrémités sont censées pouvoir glisser horizontalement pour prendre leur équilibre, et alors la réaction de l'appui est verticale. Il est des cas, même dans la pratique, où on ne peut plus supposer la réaction verticale. Par exemple, dans l'*auvent* (fig. 57), la barre 4 fait subir au mur une traction R, qu'on combattra par une *ancre* noyée dans la maçonnerie, et l'ensemble des barres 2 et 3, une compression qui sera transmise par une plaque métallique placée normalement à la résultante R′.

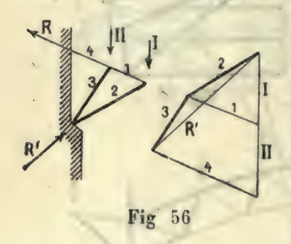


Fig 56

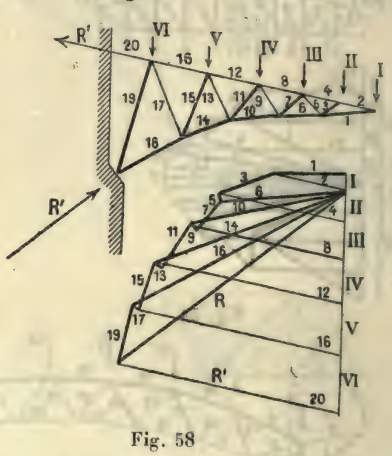


Fig. 58

De même pour la *marquise* (fig. 58), la *grue* à mâter les vaisseaux (fig. 59), les poutres de pont (fig. 60 et 61) (1), on est amené à des conclusions du même genre.

On peut étudier la statique graphique et ses usages dans de nombreux traités, dont ceux de Müller-Breslau, Maurice Lévy, Cremona, Maurer, etc.

(1) On suppose que le tablier de ce dernier pont est à la partie inférieure de la poutre. Il peut être à la partie supérieure comme l'indique le pointillé : ce sont alors les deux nœuds supérieurs qui sont chargés, et l'épure est à modifier.

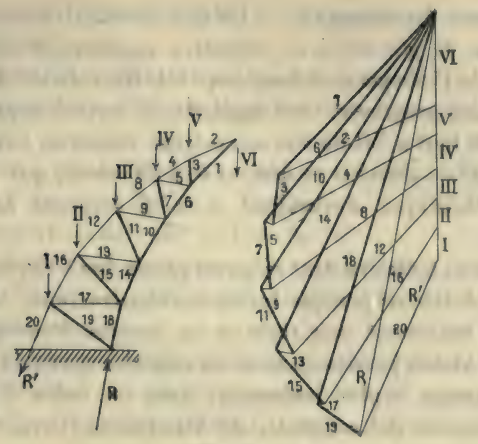


Fig. 59

Fig. 60

Fig. 61

Géométrie du compas. — De grossièrement concrète qu'elle était d'abord, la géométrie se subjectiva rapidement surtout sous l'influence de Pythagore, et longtemps elle fut cultivée dans le seul but de la faire progresser : les applications empêchaient d'ailleurs qu'on perdît tout à fait de vue son origine objective. Cependant on n'a pas laissé de chercher ce que cet être de raison, qui s'appelle la géométrie théorique, deviendrait si on lui imposait de nouvelles conditions.

La première tentative dans ce genre paraît due à Cardan et à Ferrari, qui exécutèrent presque toutes les constructions d'Euclide en employant seulement une règle et un compas d'ouverture invariable. Les Arabes paraissent avoir eu une idée semblable.

Mais l'ouvrage le plus intéressant dans cet ordre d'idées est la célèbre *Geometria del compasso*, de Mascheroni (Pavie, 1797), tra-

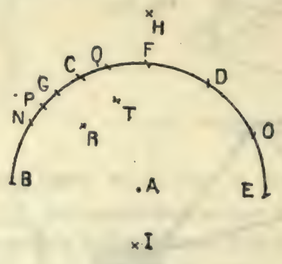


Fig. 62

duite en français dès 1798 [1]. L'auteur se propose un grand nombre de constructions du premier et du second degrés, en s'interdisant l'usage de la règle.

Par exemple, *soit à doubler la droite* AB (fig. 62). On décrit la demi-circonférence BA et on prend, avec le compas, AB = BC = CD = DE.

Cor. I. Prenons BD = BH = EH, et AH = BF ; F est le milieu

[1] On en a également des abrégés en français et en allemand, par Cousinery (1851) et Hutt (1880).

de la demi-circonférence. De là, la *construction du carré dont on donne le côté* AB.

II. Prenons FN = AB ; NB est un arc de 30°.

III. Prenons BG = HC ; l'arc BG est de 45°, et par suite NG, celui de 15°.

IV. Prenons OE = BN, AH = NI = OI, BI = BQ ; l'arc BQ est de 72°.

V. Faisons AI = BP ; BP est l'arc de 36°.

VI. *Construire un carré sur* AB *comme diagonale.* Prenons BT = BC, ET = AH, AR = BR = AT ; AR et BR sont deux côtés du carré demandé.

VII. *Elever une perpendiculaire en un point Z d'une droite* ZB. Du point quelconque A, on décrit une circonférence passant par B et on porte le rayon trois fois en BC, CD, DE ; E est le point cherché.

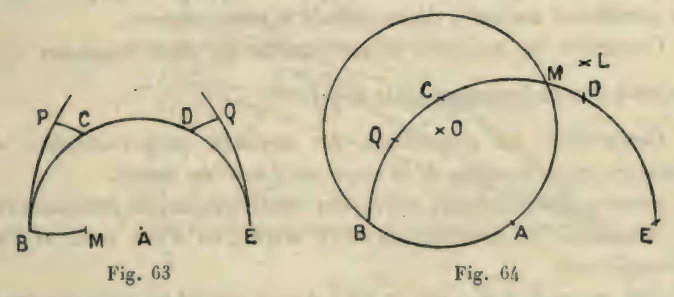


Fig. 63 Fig. 64

VIII. *Trouver le milieu de la droite* AB (fig. 63). On prend BQ = EP = BE, EQ = ED = BP, PM = PB, EM = EQ.

Trouver le centre d'un cercle donné (fig. 64). Du point A, décrire la demi-circonférence BE, prendre BC = CD = DE = BA. Si M est l'intersection des deux cercles, des deux centres E et A, avec une ouverture de compas égale à EM, tracer deux arcs qui se coupent en L ; de L, prendre LQ = LA ; des centres B et A, avec une ouverture de compas égale à BQ, décrire des arcs qui se coupent au point cherché O [1].

[1] Delisle a donné une autre solution en 1860 dans les *Nouv, Ann.*

Ce qui précède fera suffisamment comprendre l'ingéniosité qu'il a fallu déployer à chaque instant pour aboutir à des solutions souvent très cachées. La liste suivante de la majeure partie des questions traitées le fera encore mieux voir.

Mener une parallèle à une droite donnée.

Diviser un arc donné en deux parties égales.

Élever à une droite, en un point donné, une perpendiculaire de longueur donnée.

Abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée.

Porter une longueur sur une droite déterminée par deux points.

Construire un triangle dont les côtés soient donnés.

S'assurer que trois points sont en ligne droite, ou qu'ils forment un triangle rectangle.

Vérifier qu'une droite déterminée par deux points est perpendiculaire ou parallèle à une autre déterminée de la même manière.

Construire la troisième proportionnelle de deux longueurs a, b $\left(\text{c'est-à-dire la longueur égale à } \frac{a^2}{b}\right)$.

Construction des proportions, des moyennes proportionnelles, des partages proportionnels, de la moyenne et extrême raison.

Construction des racines carrées des nombres entiers ou fractionnaires.

Déterminer l'intersection de deux droites, ou d'une droite et d'une circonférence.

Par les points a et c, mener deux droites faisant un angle abc égal à un angle donné.

Doubler un angle donné ; en prendre la moitié.

Sur une longueur donnée, construire un triangle semblable à un triangle donné, un pentagone, un octogone, un décagone réguliers.

Trouver le centre d'un cercle déterminé par trois points.

Circonscrire un carré ou un triangle équilatéral à un cercle donné.

Construire les faces d'un tétraèdre, trouver sa hauteur.

Inscrire un carré ou un hexagone régulier dans un triangle équilatéral.

Trouver les intersections des diagonales d'un pentagone.

Dans un cercle, inscrire trois ou quatre cercles égaux tangents entre eux et avec le premier.

Dans un cercle donné, inscrire sept hexagones égaux.

Poncelet et Steiner ont montré à résoudre les problèmes de géométrie plane en n'employant que la règle et un cercle tracé une fois pour toutes dans le plan. Une géométrie moins féconde, mais plus intéressante est la *géométrie de la règle*, basée sur la théorie des transversales : on sait par exemple, comment, à l'aide du théorème de Pascal, on mène en employant la règle seulement, une tangente à une conique.

A ce propos, il est à remarquer que le premier tracé de ce genre a été donné par l'Hospital (l. cit.) : soit à mener la tangente en M (fig. 65) ; on mène les cordes quelconques MA, MB, et par A et B

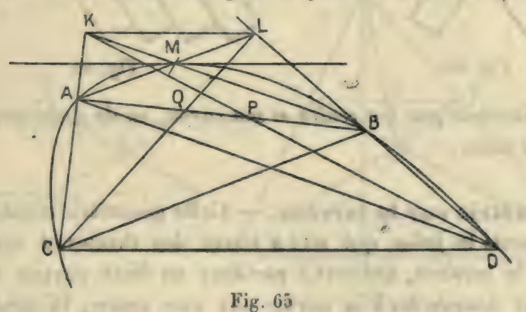


Fig. 65

les parallèles AD et BC à MB et MA : la tangente en M est parallèle à CD. Cela se prouve en remarquant que les segments AC, MB, compris entre les parallèles AM, CB, sont égaux ; et qu'il en est de même des segments AM et BD, ainsi que des triangles ACM, ABM et DBM, d'où il suit que les segments MC, MD sont égaux.

Or si on joint les intersections K et L, des droites BM, CA, AM, DB, on peut s'assurer que KL est parallèle à CD [1] : c'est donc un cas très particulier du théorème de Pascal.

[1] En effet les triangles KAD, BAD sont égaux, de même que les trian-

M. de Coatpont (*Nouv. corresp. math.* 1877) a montré à résoudre certains problèmes à l'aide de la *double règle* dite *règle plate*. Par exemple les fig. 66 et 67 indiquent le moyen de *mener une perpendiculaire ou une parallèle, du point* A, *à une droite* CB. Il traite de même les problèmes suivants : *porter une longueur donnée à la suite d'une droite donnée; — trouver l'intersection d'une droite et d'un cercle déterminé par son centre et son rayon, ou de deux cercles déterminés de même.*

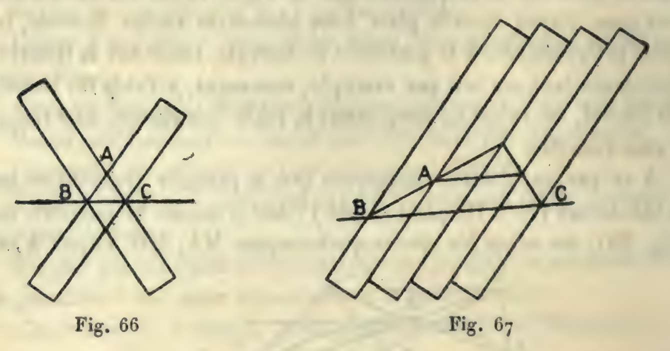


Fig. 66 Fig. 67

Géométrie sur le terrain. — Cette géométrie emploie comme instruments le *jalon*, qui sert à tracer des droites et marquer des points ; le *cordeau*, qui sert à partager en deux parties égales une longueur donnée ou à la porter sur une autre ; le *cordeau-jalon*, dont l'office est de transporter un angle. On emploie aussi dans les opérations de précision, la *fausse-équerre*, l'*équerre*, le *mètre* et le *goniomètre*. Schooten, Mascheroni, Brianchon, Servois et récemment

gles LBC, ABC. Donc il en est de même des triangles KAP et BPD, LBQ et AQC ; et par suite on a :

tri. KLD = quad. KLBA = tri. KLC.

Les triangles KDL, KLC étant égaux, c'est que KL est parallèle à CD.

G. de Longchamps ont successivement édifié cette curieuse théorie qui cependant n'a pas encore été traitée méthodiquement. On verra ci-dessous les problèmes les plus intéressants, soit comme énoncés, soit comme solutions ; on ne se préoccupera pas du côté pratique des solutions.

Mener une parallèle à une droite donnée AB, *par un point* C *donné*. Schooten prescrit de tirer AC, de prolonger cette ligne d'une longueur égale CD, de joindre D au point B et de prendre le milieu de DB.

Ou bien prolonger AB d'une longueur égale BD, joindre B à un point quelconque E de CD ; si AC coupe BE en F, le milieu de DF est sur la ligne cherchée.

Mener la bissectrice d'un angle donné A. Solution de Schooten :

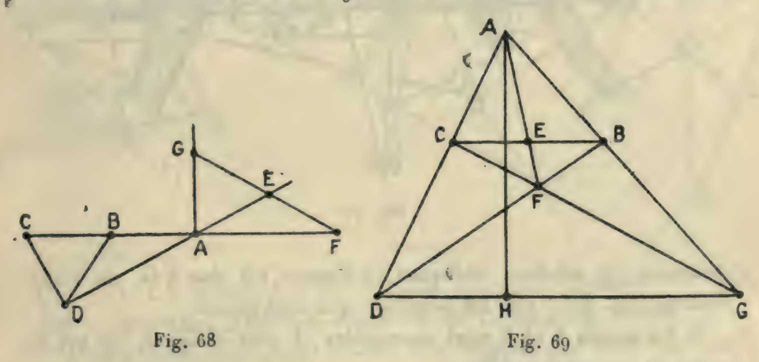


Fig. 68 Fig. 69

prendre sur un côté les longueurs AB, BC égales aux longueurs AD, DE prises sur l'autre. Les droites BE, CD se coupent sur la bissectrice cherchée.

Elever une perpendiculaire à une droite donnée. Solution de Schooten. Prendre les longueurs égales AB, BC, BD, AE (fig. 68), puis AF = AD : il ne reste plus qu'à doubler FE en EG. Comme vérification, on doit avoir AG = CD.

Dans cette construction comme dans les suivantes, les jalons sont placés dans l'ordre alphabétique des lettres qui les représentent.

Du point A (fig. 69), *abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée* BC. La solution suivante est beaucoup plus simple que celles qu'on donne habituellement. On prend BC = AB et AD = 2.AB ; on joint A au milieu E de BC, et C au point d'intersection de AE et de BD ; sur DG on prend DH = AC : AH est la perpendiculaire cherchée.

Placer un jalon en ligne droite entre deux points inaccessibles et

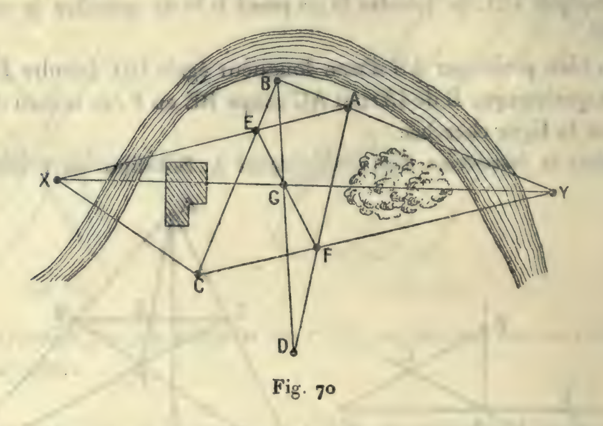


Fig. 70

invisibles. La solution indiquée ci-dessous est due à G. de Longchamps (fig. 70) : elle ne demande que sept jalons.

Si les points X et Y sont accessibles et peu éloignés, on est ramené au premier problème.

Déterminer la distance d'un point accessible. Les fig. 71, 72 et 73 représentent les solutions de Schooten : elles demandent un grand emplacement. Les deux suivantes nécessitent des mesurages et un calcul, peu compliqué d'ailleurs.

Avec Carnot, on mène de part et d'autre de AX, les droites XEC, XDB ; puis CFD, qui coupe AX en F ; puis BFE ; ce qui donne

$$AX = \frac{AG.FG}{AF - FG}$$

Avec Mascheroni, on mène sur la rive accessible, la droite AB qu'on prolonge d'une longueur égale BC ; on joint C à un point quelconque D de AX, par une droite CD, qui coupe XB en E : on a

$$AX = \frac{AB.EC}{EC - ED}.$$

Relevé d'une île. Soit un point Y de l'île située sur la droite AX

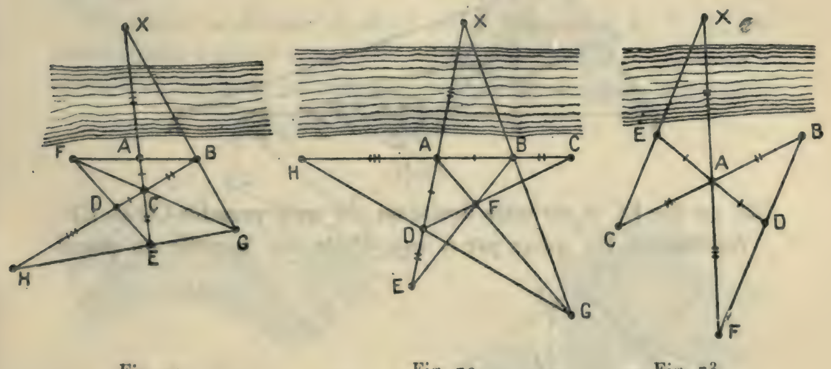


Fig. 71 Fig. 72 Fig. 73

(fig. 73). CY coupe AE en G : on n'a qu'à prendre sur AD, DH = EG, tirer BHI, qui coupe AF en I : on a AY = AI.

Prolonger un alignement au-delà d'un obstacle. Le théorème sur le point de concours des hauteurs d'un triangle donne une solution immédiate, mais elle demande une équerre.

Servois et de Longchamps ont donné les solutions représentées par les fig. 74 et 75. Elles n'emploient que des jalons ; mais elles seraient peu exactes à cause de l'obliquité des alignements qu'elles demandent. Il vaudrait mieux se résoudre à faire quelques mesurages. Ainsi la fig. 76 donne le point H à l'aide de la formule

$$DH = \frac{DE.DG}{2.DG - DE}.$$

Avec un cordeau, on arrive au résultat bien plus facilement ; par exemple, en utilisant le premier problème, ou bien par les moyens suivants.

Soit à trouver le point G dans le prolongement de AB. On mène AC quelconque, qu'on prolonge de sa longueur en CD ; puis BC, qu'on prolonge également de sa longueur, en CE. D'un point F de

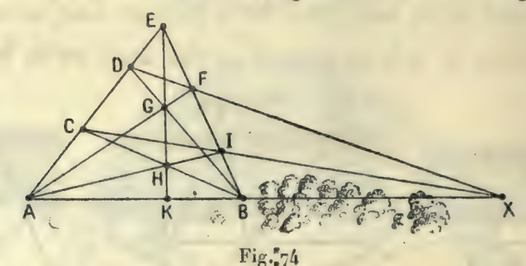


Fig. 74

ED, on tire FC et sur cette droite on n'a qu'à prendre CG = CF.

Autrement. On mène par A une droite sur laquelle on prend

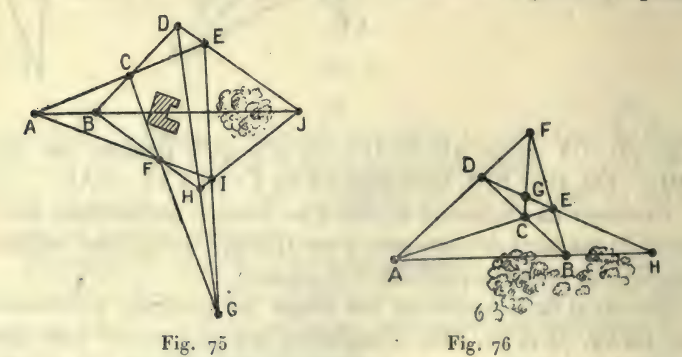


Fig. 75 Fig. 76

AC = AD ; on prolonge les droites BC et BD de longueurs BE, BF égales à elle-même : G est le milieu de EF.

Autrement. Du point extérieur C, on mène les droites CA, CB dont on prend les milieux D et F ; on prolonge la droite BD, de DF = DB, et FE, de EG = EF.

Autrement. Du point C, on tire CA, CB ; on prolonge CA de la moitié de sa longueur en CE, et CB du double de la sienne en CD. Il ne reste plus qu'à prolonger DE, d'une longueur EG égale à elle-même.

Par un point donné A, *mener à la droite* BC, *une parallèle à travers un obstacle.* Avec Schooten, on prendra sur BC (fig. 77), les longueurs égales BC, CD, DE, EF ; on mènera la droite quelconque DG, puis les droites AB, AC, GE, HF, ce qui donnera le point I cherché.

Déterminer la distance de deux points inaccessible X, Y. G. de Longchamps a donné cette solution directe : établir deux alignements rectangulaires AE, EC, sur lesquels on abaissera les perpen-

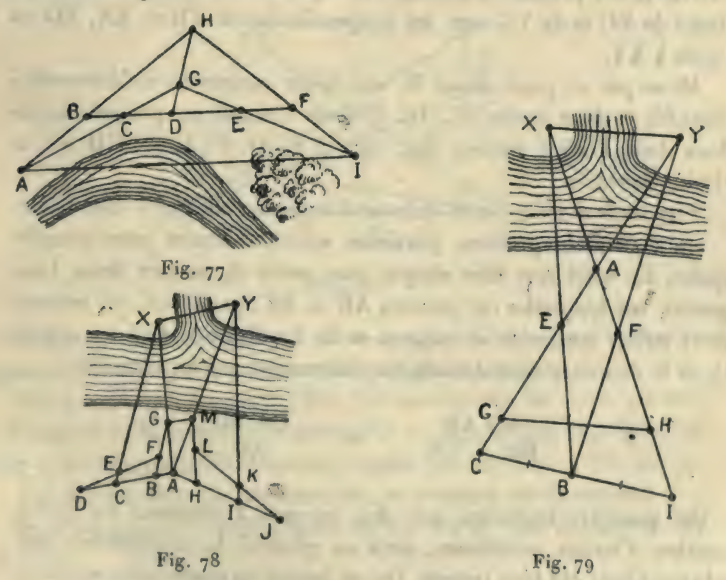


Fig. 77

Fig. 78

Fig. 79

diculaires XA, YB, XD, YC ; on portera ensuite AB en EF et CD en FG ; FG sera égale à la distance cherchée.

Solution de Schooten (fig. 78). On prend BC = CD = 2.AB,

EF = ED, HI = IJ = 2.AH, KL = KJ ; on a ainsi MG $= \frac{1}{3}$ XY. Cette solution donne le moyen de mener une parallèle à une droite inaccessible.

Solution de Mascheroni (fig. 79). On fait

$$BC = BD, \qquad CG = \frac{AC.AF}{DF - AF}$$

et on aura GH = XY.

Pratiquement, il conviendra d'employer la solution classique bien connue que voici : sur la droite AB, abaisser les perpendiculaires XAE, YBD ; prendre le milieu C de AB ; D et E étant les intersections de XC et de YC avec les perpendiculaires YB et XA, ED est égale à XY.

Mener par un point donné H, *une droite concourant à l'intersection invisible de deux droites* AC, BI. D'après Carnot, on placera les jalons dans l'ordre suivant (fig. 74), I, C, D, F, J, G : GH est la droite cherchée.

Trouver le diamètre et la distance d'un bassin circulaire inaccessible.

On a, de cette question, plusieurs solutions toutes assez compliquées. En voici une très simple : du point A, mener deux tangentes, sur lesquelles on prendra AB = BC ; par B et C, on mènera deux autres tangentes se coupant en D. La distance de A au centre O, et le diamètre sont donnés respectivement par les formules

$$\frac{AD.AB}{BD - AB} \quad \text{et} \quad \frac{OA.BC}{AB}.$$

On pourrait résoudre, par des moyens analogues, un grand nombre d'autres problèmes ; mais en général, la complication des solutions leur ôte tout intérêt. On en jugera en essayant de résoudre ainsi les suivants :

Trouver, sur une droite donnée, le point équidistant de deux points inaccessibles (Schooten).

Abaisser, d'un point donné, une perpendiculaire sur une droite inaccessible, et trouver la longueur de cette perpendiculaire (id.)

Prolonger une droite passant par les intersections inaccessibles et invisibles de deux couples de droites (Servois).

Trouver la distance d'un point donné à l'intersection inaccessible de deux droites (de Longchamps).

Trouver l'angle de deux droites déterminées chacune par deux points inaccessibles (id.)

Trouver la distance d'un point inaccessible à une droite également inaccessible (id.)

Pour les tracés d'arcs circulaires tangents à deux droites données,

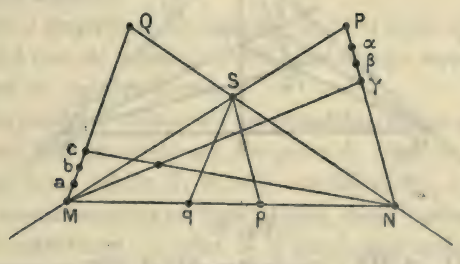


Fig. 81

on indique habituellement, comme moyen d'exécution, la fausse équerre. Mais on peut procéder plus élégamment ainsi.

Soit à raccorder les droites MS, NS, *par un arc de cercle qui leur soit tangent en* M *et en* N. On prend MP = NQ = MN (fig. 80) ; sur MQ et NP, on porte les longueurs égales Ma, ab, bc,..., Pα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ... Les droites Mγ, Nc, par exemple, se coupent sur la courbe.

On peut prendre aussi Nq = Mp = NS, et agir de même sur Sq et Sp.

Le rayon étant donné, on peut aussi arriver au tracé, moyennant un calcul préliminaire. *Soit à raccorder les deux droites* SM, SN (fig. 81) *par un arc circulaire de rayon r*. On prendra les trois lon-

gueurs égales et d'ailleurs quelconques, SA, SB, SC, puis $SM = SN = r\frac{AB}{AC}$. On joindra S au milieu V de MN et on prendra sur VS, la longueur VT égale à

$$r - r\frac{AC}{BC}.$$

Une transversale quelconque, tirée de S, rencontrera en P et Q

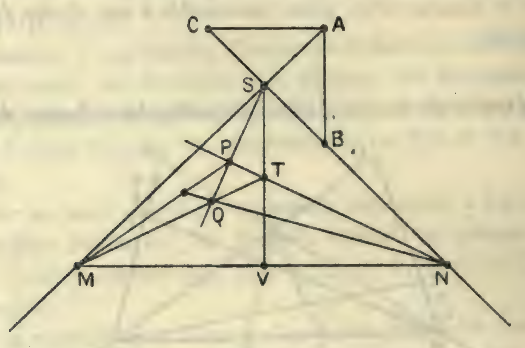


Fig. 80

les droites NT et MT : les droites NQ et MP se coupent sur la courbe.

Géométrie des systèmes articulés. — On appelle *compas composé*, — d'après Peaucellier, qui a le premier attiré l'attention sur cette importante théorie, — un assemblage de *tiges* rigides articulées permettant une déformation de l'ensemble (1). Les points ou les lignes donnant les solutions sont indiqués par des pointes fines passant à travers des ouvertures ménagées dans les tiges, ou même dans les articulations. Quelque fois celles-ci peuvent être déplacées,

(1) Sylvester a remarqué que *dans un système déformable, le nombre* t *des tiges et le nombre* a *des articulations sont liés par la relation* $3t - 2a = 4$, d'où il suit que *les tiges sont toujours en nombre pair.*

par le moyen de *clés de serrage* ; mais il ne sera pas parlé ici de ces questions relevant de la pratique, et on ne donnera que le schema des appareils.

Transport d'une longueur donnée sur une droite donnée. On utilise le compas à deux branches.

Transport d'un angle. — Tracé par points de perpendiculaires élevées à une droite ou abaissées sur une droite. — Tracé par points de parallèles à une droite donnée. On se sert d'un X, assemblage de deux barres égales articulées en leurs milieux.

Symétrie polaire. On joint les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme articulé par une bride dont le milieu reste fixe. Cet appareil peut servir aussi à prendre le milieu de la distance de deux points donnés.

Compas de proportion. Se compose de deux tiges égales articulées au moyen d'une clé mobile, et sert à réduire ou amplifier une longueur dans un rapport donné.

Le *pantographe* se compose d'un parallélogramme articulé ABCD, dont le côté BC est prolongé. Le point A étant fixe, et en ligne droite avec deux points M, N, pris sur CD et BC, les trois points A, M, N seront toujours en ligne droite, dans toutes les déformations de l'instrument ; de plus, si M décrit une certaine courbe, le point N décrira son homothétique. Cet appareil a été inventé par Scheiner en 1601 et divulgué dans sa *Pantographice* (Rome 1631). Sylvester l'a généralisé et modifié de plusieurs manières, de manière à obtenir des homothéties obliques, et l'appelle, dans ce cas, *plagiographe*.

Transport d'un triangle. On pourrait employer un compas à trois branches [1].

Bissection d'un angle. On se servira du *rhomboïde* (fig. 82), élément important employé pour la première fois par Roberts en 1871, et qui, en outre, possède les propriétés suivantes :

[1] N'y aurait-il pas une étude intéressante à faire de ce *tétraèdre isocèle*. M. E. Lemoine (A. F. 1875) a étudié le tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales.

Dans toutes ses déformations, les diagonales restent perpendiculaires. Il en est de même dans tout quadrilatère orthodiagonal (J. Neuberg).

Un des côtés étant fixe, l'intersection des deux côtés adjacents décrit une cassinienne (Manheim), *et tout point du plan lié au côté opposé décrit une inverse de conique* (Roberts).

Si AB = 2.CD, *et que* CD *soit fixe, le sommet* B *décrit un tour complet pendant que* A *en décrit deux* (Galloway).

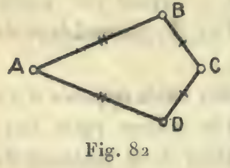


Fig. 82

Division de la distance de deux points en n parties égales. Cette opération se fait aisément à l'aide du zig-zag, formé de *n*X égaux articulés bout à bout [1].

Recherche du centre d'un cercle donné. A l'aide d'un double X, on obtiendra un losange concentrique au cercle. Un triple X déterminerait le centre lui-même. On pourrait aussi articuler, à deux des branches intérieures du double X, une bride dont le milieu donnerait le centre sans nouvelle opération.

Détermination d'un point défini par les angles sous lesquels il est vu de deux droites connues AB, BC. On se sert d'un compas plan à trois branches muni d'un *limbe* gradué, et appelé *stigmographe*.

Translateur de Kempe. Soit à transporter une longueur déterminée dans une position parallèle quelconque. On emploiera un système formé de deux parallélogrammes articulés ayant un côté commun.

Inverseurs. Soient deux rhomboïdes symétriques articulés (fig. 83). Les deux expressions de cos BAC déduites de la considération des triangles MAA′, BAC, donnent la relation

$$AA'.AC = \frac{AB}{AM}(AM'^2 - A'M'^2) = \text{const.}$$

Donc le point A étant fixe, les points A′ et C décriront deux courbes inverses l'une de l'autre.

[1] Le *Katalog* de Dyck (Munich, 1892), donne pour ce même problème, le dessin d'un appareil bien trop compliqué.

Inverseur de Peaucellier. Supprimons les tiges inutiles M′B′, B′C′, C′D′, D′P′, on aura une généralisation de l'inverseur de Peaucellier, lequel est représenté fig. 84 et comprend un losange articulé à deux brides égales AB, AD. On a ainsi AA′.AC = const.

C'est la découverte de cet appareil, annoncée en 1864 et divulguée en 1867, qui d'abord inaperçue, a attiré l'attention de Sylvester, lequel a commencé à faire connaître en 1873, les premières vues sur la théorie des systèmes articulés.

Inverseur de Hart. Prenons sur les tiges AM′, A′M′, CB (fig. 83),

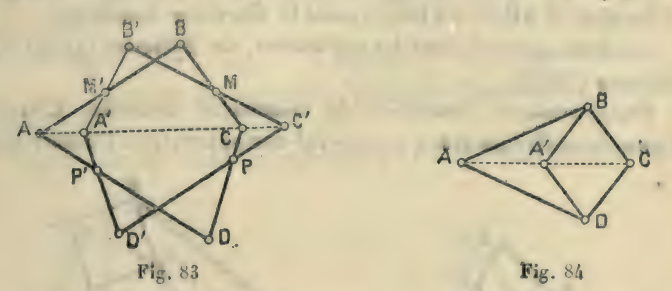


Fig. 83

Fig. 84

trois points α, β, γ, situés sur une parallèle à AC; on aura de même $\alpha\beta.\alpha\gamma$ = const. et la figure sera un *contre-parallélogramme* (fig. 85). Cette propriété est due à Hart, mais le dispositif lui-même a été indiqué pour la première fois par Schooten, qui a remarqué que *les points* M′ *et* M *étant fixes, l'intersection des tiges* M′B, MB′ *décrit une ellipse; et que la tige* M′B *étant fixe, l'intersection des droites* M′B′, MB *décrit une hyperbole.*

Fig. 85

On peut ajouter aux propriétés de cette remarquable figure, les suivantes : M′B′ *restant fixe, tout point de* MB *décrit une inverse de conique* (Cayley).

Si M′B = $\sqrt{2}$ BM *et que* BM′ *reste fixe, le milieu de* MB′ *décrit une lemniscate* (Carbonel).

Extracteurs binômes quadratiques. Si, aux milieux de BC et de

CD (fig. 82), on articule deux tiges de longueur $\frac{1}{2}$ BC, s'articulant elles-mêmes en O, on a :

$$AO^2 - OC^2 = \text{const.}$$

On a une relation semblable en prolongeant de leurs longueurs deux côtés inégaux d'un rhomboïde (fig. 86), car on a :

$$A'D^2 - DC'^2 = \text{const.}$$

et de plus, *si* $AB = \sqrt{2}\,BC$, *le point* C' *décrit une lemniscate.*

Ces deux appareils sont les *extracteurs*, de Sylvester (1874) et de Johnson (1875).

Transformation Peaucellier du mouvement circulaire. L'inverse d'une circonférence étant en général une autre circonférence, si, au

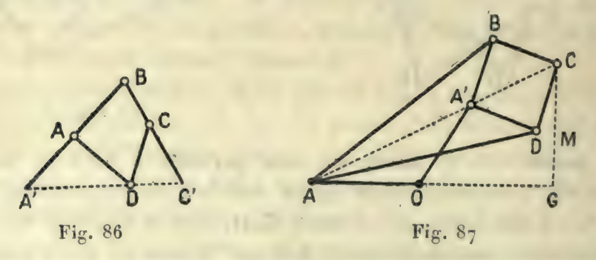


Fig. 86 Fig. 87

moyen d'une bride OA' (fig. 87), dont une extrémité est fixe [1], on décrit une circonférence et qu'un inverseur AC soit articulé à cette bride, le sommet C décrira une autre circonférence. On a tracé de cette façon des circonférences de 12 mètres de rayon.

Guidages à inverseurs. Dans l'appareil précédent, si OA' = OA, le lieu de C est une droite : c'est le *guidage* Peaucellier, à huit tiges, le premier connu.

Si, au lieu de l'inverseur Peaucellier, on emploie un inverseur

(1) Les articulations fixes sont indiquées par des cercles noirs. Les tiges qui les contiennent peuvent être supprimées.

Hart, on a le guidage Hart, à six tiges (fig. 88), moins précis que le précédent, à cause du plus grand nombre de croisements de tiges.

Guidages de Kempe. Kempe a obtenu plusieurs autres solutions

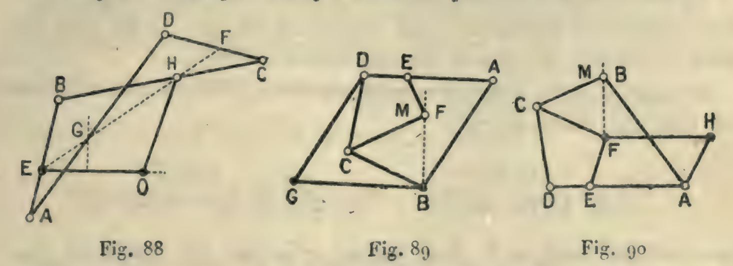


Fig. 88 Fig. 89 Fig. 90

des plus élégantes du problème posé par Peaucellier. En voici quelques-unes :

Complétons le *double rhomboïde* (¹) AC (fig. 89 et 90) par deux

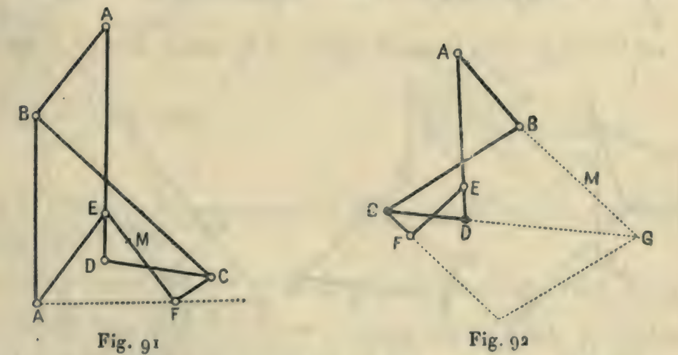


Fig. 91 Fig. 92

brides DG, BG ou AH, FH. Le point F ou le point B trace une perpendiculaire à AD.

De même, au *double-contreparallélogramme* (²) AF (fig. 91), arti–

(¹) On appelle ainsi deux rhomboïdes articulés semblables ABCD, DCEF, ayant deux côtés communs. Cette similitude a lieu dans toutes les déformations de l'ensemble.

(²) C'est l'assemblage de deux contreparallélogrammes semblables ayant deux côtés communs.

culons le losange CG ; le point G se mouvra dans le prolongement de CD, puisque les angles en C sont toujours égaux. On peut aussi compléter comme l'indique la fig. 92.

Un autre appareil, qu'on pourrait appeler *parallélogramme-rhomboïde-contreparallélogramme*, est représenté fig. 93. Il est aisé de faire voir que C décrit une perpendiculaire à FD [1].

Guidage de Hart. Prolongeons les côtés AD, BC du quadrilatère AC (fig. 94), des longueurs

$$DG = \frac{AD.DC^2}{AB^2 - DC^2} \quad \text{et} \quad CE = \frac{CB.CD^2}{AB^2 - CD^2},$$

et articulons en G et E, deux brides articulées GF, EF, dont les longueurs soient

$$\frac{AB.BC.CD}{AB^2 - DC^2} \quad \text{et} \quad \frac{AB.AD.DC}{AB^2 - DC^2};$$

les angles en E et en G seront égaux ; et la valeur de $AF^2 - BF^2$

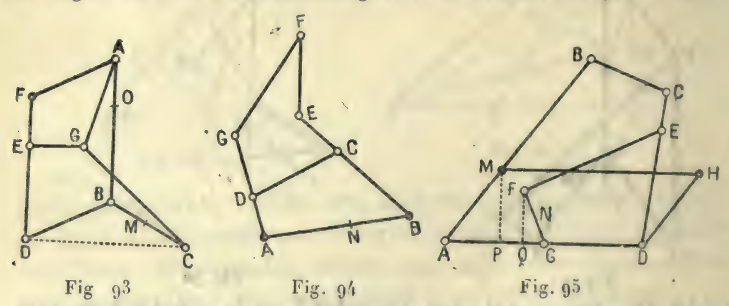


Fig 93 Fig. 94 Fig. 95

sera constante, ce qui fait voir que le point F tracera une perpendiculaire à AB.

[1] Les triangles EFA, AFD sont semblables, de même, par conséquent que les triangles EAD, GAB et BCG. Donc

$$ABC = GBC - BGC = AED - EDA = EFA + EAG - DAB = EFA = ABD.$$

M. Darboux a remarqué un cas remarquable de cet appareil, dont il sera parlé plus loin ; et M. Bricard, le cas où AD = CB, ce qui permet de beaucoup simplifier les démonstrations.

Sextilatère de Kempe. Cet instrument est formé de deux quadrilatères semblables articulés comme l'indique la fig. 95. Prenons, sur AB et GF, M et N, tels que $\frac{NG}{AM} = \frac{BC.CD}{AD.AB}$, et projetons ces points sur AD en P et Q. On trouvera la relation

$$PQ = AG - \frac{AM}{2.AD.AB}(AB^2 + BC^2 - CD^2 - DA^2)$$

Donc 1° si on complète le parallélogramme MADH et qu'on fixe

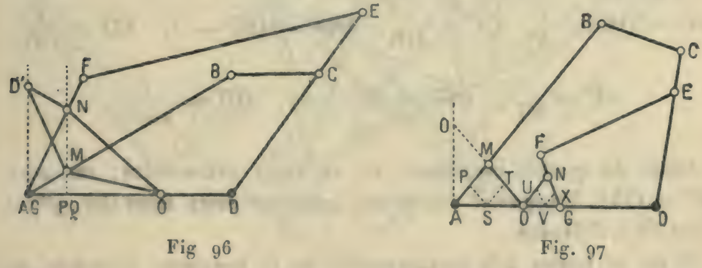


Fig 96 Fig. 97

MH, la longueur PQ sera constante et le point N décrira une perpendiculaire à MH.

2° Si on prend AM tel que $PQ = \frac{1}{2}$ AG, et qu'en M et N, on articule les tiges MO, NO respectivement égales à MN et NG, le point O se mouvra toujours sur AD.

3° Si on prend AM tel que PQ = o, les points M et N seront toujours sur la même perpendiculaire à AD. Maintenant, si on fait DG = AD, il viendra la fig. 96. Si on lui ajoute en M et N les deux tiges MO et NO telles que $NO^2 - MO^2 = NA^2 - MA^2$, l'articulation O se mouvra sur AD.

4° On obtient une autre solution en articulant en N et M les tiges NO′, MO′ égales à MA et à NA.

Tracer une perpendiculaire à une droite donnée. La plupart des guidages indiqués plus haut résolvent cette question.

Transporter une longueur sur sa propre direction. Sylvester a imaginé pour résoudre ce problème un appareil de soixante-treize tiges ; on en a un beaucoup plus simple, en articulant aux milieux R, T, U, X, de AM, MU, UN, NG (fig. 97), les tiges articulées RST, UVX. Les deux points S, V seront toujours sur AD et leur distance toujours égale à $\frac{1}{2}$ AG.

Extraction de la racine carrée. Portons sur une même direction, successivement

$$OB^2 = OA^2 + \frac{1}{2}, \quad OC = \frac{1}{OB}, \quad OD^2 = OC^2 - 1, \quad ED = \frac{1}{OD},$$

$$OF = \frac{2}{OE}, \quad OG^2 = OF^2 + 1, \quad OH = \frac{1}{2.OG},$$

à l'aide de quatre inverseurs et de trois extracteurs ; on aura $OH = OA^2$. L'appareil comprend quarante-deux tiges (fig. 98) et il est dû à Sylvester.

Si on se borne à la connaissance de la longueur cherchée, on pourra simplement se servir de l'extracteur de Johnson.

Réverseurs. Kempe a appelé ainsi les appareils servant à tracer la symétrique d'une figure plane, par rapport à une droite fixe.

Considérons deux doubles contre parallélogrammes ayant même bissectrice CD. On aura, d'un côté de CD, deux droites CB, CB′ et de l'autre, 2 autres droites CF, CF′ symétriques des premières. Si on achève les parallélogrammes BCB′B″, FCF′F″, les deux points B″, F″ seront toujours symétriques par rapport à CD.

Le réverseur suivant, fondé sur un principe plus simple, demande quatre tiges de plus : il consiste à faire décrire la même droite à deux guidages Peaucellier et réunir les deux articulations traçantes par un losange dont les deux sommets libres sont évidemment symétriques par rapport à la droite tracée (Neu, 1883).

Appliquant le même principe à deux appareils Hart, on aurait un autre réverseur de quatorze tiges, comme celui de Kempe.

Mouvement parallèle. Il s'agit de transporter une droite parallèle-

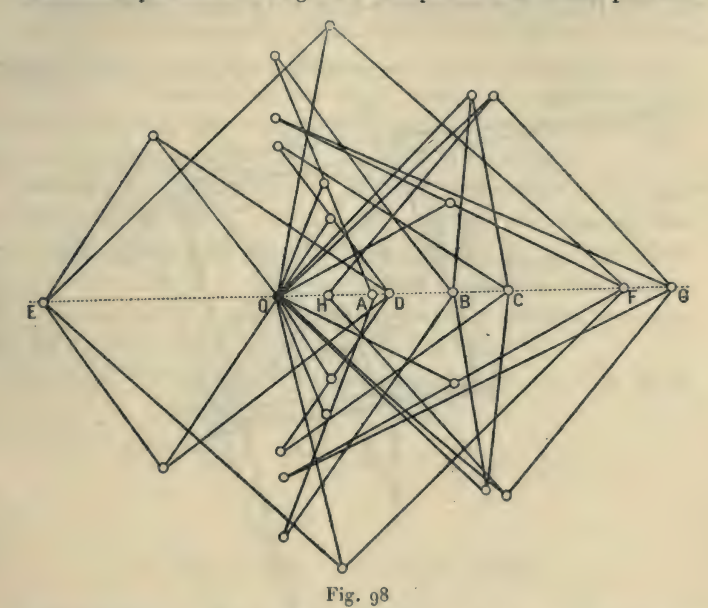


Fig. 98

ment à elle-même, de manière que chacun de ses points trace une

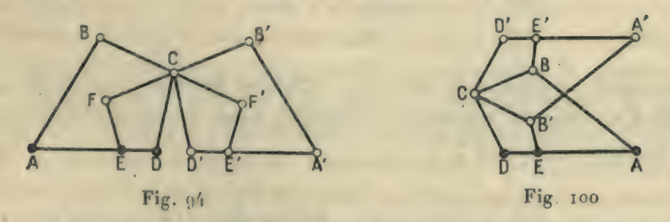


Fig. 99 Fig. 100

perpendiculaire à sa direction. Les deux appareils (fig. 99 et 100) composés de deux doubles rhomboïdes sont dus à Kempe, ainsi que les suivants, et tous donnent la solution demandée.

Dans les fig. 89 et 93 complétons les parallélogrammes EAF′F et ABCB′ : les barres FF′ et B′C donnent une solution toutes deux.

La fig. 88 en fournit une autre si on articule en G et H deux brides GI, HI, égales chacune à EO ; GI se meut parallèlement à EO.

Par un point donné, tracer une parallèle à une droite déterminée par

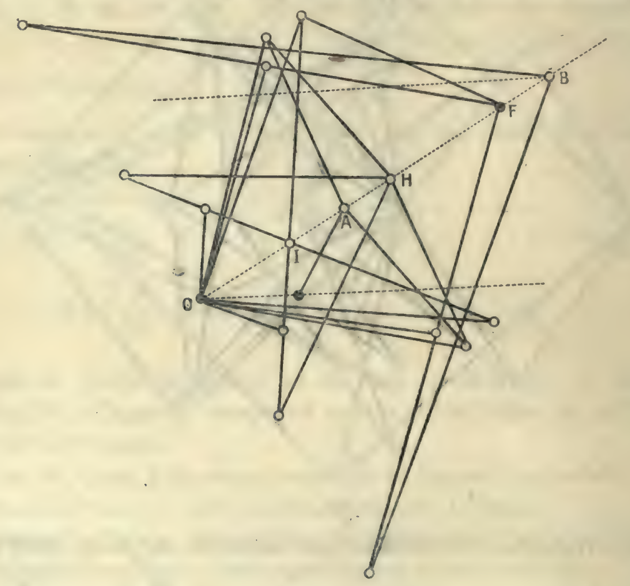


Fig. 101

deux autres points donnés (fig. 101). Sylvester résout cette question à l'aide d'un élégant appareil de vint-cinq tiges, qu'on explique par les relations suivantes :

$$OH = \frac{1}{OA}, \quad OI^2 = OH^2 - 1, \quad OF = \frac{1}{OI}, \quad OB^2 = OF^2 + 1.$$

Soit deux inverseurs et deux extracteurs,

Le système de la fig. 97 conduit évidemment au même résultat : si on articule en S et en V, deux brides SY et VY articulées elles-mêmes en Y, cette articulation Y tracera une parallèle à AG, et l'appareil n'aura que quatorze tiges. On pourrait même en produire un de douze tiges seulement, en combinant deux appareils particuliers de Hart.

Par un point donné, tracer une droite formant un angle donné avec une droite donnée. Sylvester a résolu cette question à l'aide d'un appareil de quarante-trois tiges, du genre du précédent.

Résolution de l'équation cubique. St-Loup et Greenhill ont proposé en 1875 pour cet objet, l'emploi d'un quadrilatère articulé dont deux côtés opposés sont convenablement prolongés : si a est la longueur du côté fixe, b, c, d, celles des trois autres, les deux expressions du cosinus de l'angle des deux côtés c et a donnent une équation du troisième degré, qu'on assimile à la proposée.

Peu avant, Sylvester avait proposé l'appareil fig. 102, qui donne

$$AB = \frac{a^2}{OA}, \quad BC = \frac{a^2}{OB}, \quad AD = \frac{b^2}{AC},$$

d'où

$$b^2.OA^3 + a^2(a^2 - b^2)\,OA = a^4.OD.$$

Problème déliaque. Solution de Sylvester : la supposition $b = a$ dans l'appareil précédent, conduit à l'équation $a^2.OD = OA^3$.

Trisection de l'angle. Les Anciens avaient trouvé plusieurs solutions géométriques de ce célèbre problème, employant la quadratrice, l'hyperbole, la conchoïde, la spirale, l'hélice, peut-être le limaçon et la cycloïde et probablement d'autres courbes encore. Nicomède avait même imaginé un conchoïdographe, — d'ailleurs très peu pratique, — dans le but de résoudre cette question et la précédente. Depuis, on a proposé bien des moyens, soit à l'aide de nouvelles courbes, soit à l'aide d'instruments plus ou moins commodes dont on mentionnera quelques-uns, à titre de curiosité.

Descartes en 1629, avait signalé la possibilité de la solution au moyen d'un cylindre, (soit en employant une hélice, soit à l'aide de courbes tracées au compas sur la surface extérieure). — Barrow, en 1672, proposait l'usage d'un miroir cylindrique. — Ceva, en

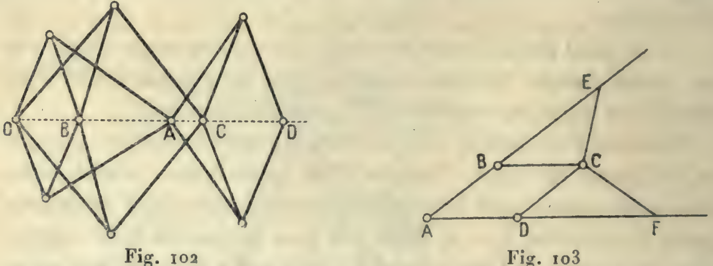


Fig. 102 Fig. 103

1696, décrivait un appareil formé d'un losange articulé AC (fig. 103), complété par deux branches CE, CF glissant sur les prolongements de AB et de AD. Si CE = CF = CD, l'angle A est le tiers de l'angle ECF [1]. — Bergery, en 1835, a indiqué l'appareil fig. 104,

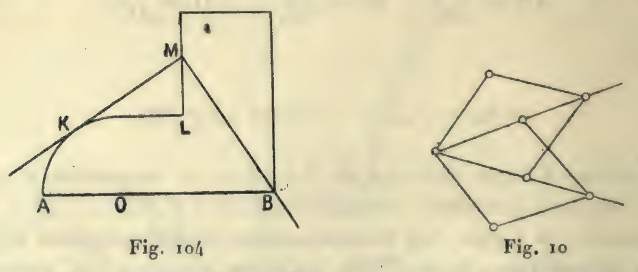


Fig. 104 Fig. 10

composé d'un demi-cercle accolé à un rectangle dont la largeur est égale à son rayon. L'angle KMB étant promené de telle manière que le sommet soit sur ML et que l'un des côtés reste tangent au demi-cercle, quand l'autre passera en B, on aura LMB $= \frac{1}{3}$ KMB.

(1) Cette solution a été étendue à une multisection quelconque par le marquis de l'Hospital, et M. Perrin, en 1875, en a donné une simplification qui en fait un cas particulier de la figure 34.

— M. Laisant, en 1875, a proposé l'élégant appareil fig. 105, à articulation et à glissières, et d'une théorie aussi élémentaire que possible [1].

[1] J'ai donné, en 1896, celui de la figure 106, ainsi que divers procédés dont les suivants :

Sur un papier calque, on tracera un T à branches égales, qu'on promènera sur le plan de l'angle MOB (*fig.* 107), de telle manière que la grande branche passe par le sommet et que l'extrémité d'une des petites branches s'appuie sur une parallèle PL au côté OB menée à une distance égale à IK. Quand le point M rencontrera l'autre côté, on aura MOK $= \frac{1}{3}$ MOB.

Ou encore, on trace sur le calque une droite sur laquelle on marque une

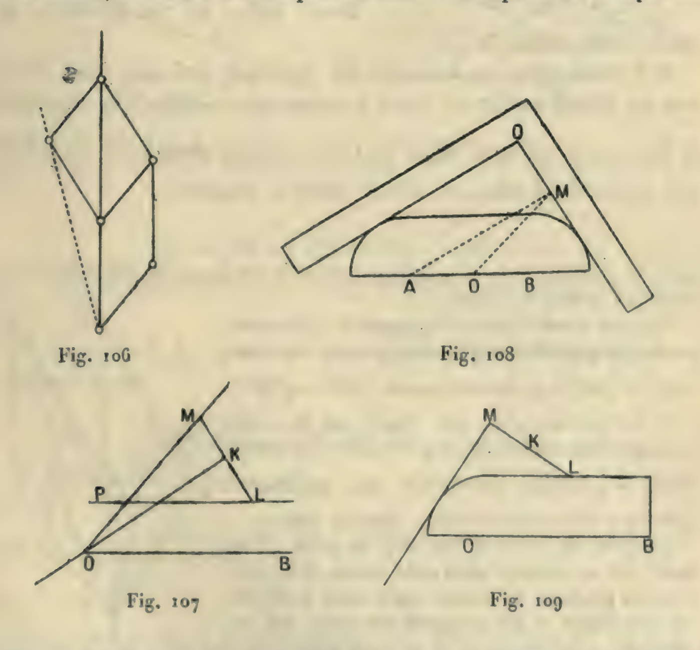


Fig. 106

Fig. 108

Fig. 107

Fig. 109

longueur PQ égale au double du côté OB ; et on s'arrange de manière que la droite PQ passe par le sommet O et que la longueur PO soit comprise

Les instruments dont il vient d'être parlé comportent des tâtonnements ou des glissières : ils ne présentaient pas en conséquence la perfection désirable pour un instrument mathématique. Il importait, — au moins au point de vue théorique, — d'en trouver ne demandant que des articulations. Voici quelques-uns de ceux qui ont été imaginés dans ce but.

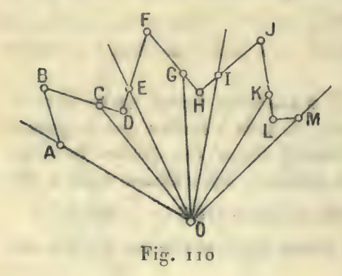


Fig. 110

1° Le compas de Sylvester fig. 110 résout le problème d'une façon bien élémentaire, mais il demande quatorze tiges, et, au sommet, une articulation septuple [1].

2° L'étude plus approfondie des systèmes articulés a fait découvrir au même savant un autre *trisecteur* plus simple, que représente la fig. 112, et où on a : $EO^2 = OC^2 - BC^2$: alors $BEO = \frac{1}{3}$ BEF. Cet appareil est celui qui sert à tracer la trisectrice.

entre la parallèle et la perpendiculaire à OM menée par le point B : l'angle QOM est le tiers de BOM.

On peut aussi employer les appareils représentés par les figures 108 et 109. Dans le premier cas, on a : $AMO = \frac{1}{3}$ MOB, et dans le second, $MOK = \frac{1}{3}$ MOB.

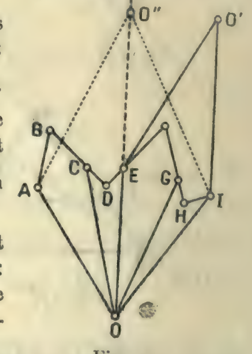


Fig. 111

[1] Le système (*fig.* 111), fondé sur le même principe élémentaire serait préférable : on aurait $O'OE = \frac{1}{3}$ O'OA. On aurait une articulation quintuple au sommet et deux tiges en moins.

De plus, en fixant la tige OE, le point O″ est forcé de se mouvoir dans cette même direction : c'est un guidage de douze tiges dont la théorie est très simple et qui ne paraît pas avoir été remarqué.

Fixant l'articulation O″, on a un conchoïdographe (voir plus loin), les deux points traçant étant O et E.

3° Kempe a proposé dans le même but, le triple contre-parallélogramme (fig. 113), qui a le défaut de nécessiter une quadruple articulation au sommet [1].

4° Plusieurs des appareils précédents peuvent servir de trisec-

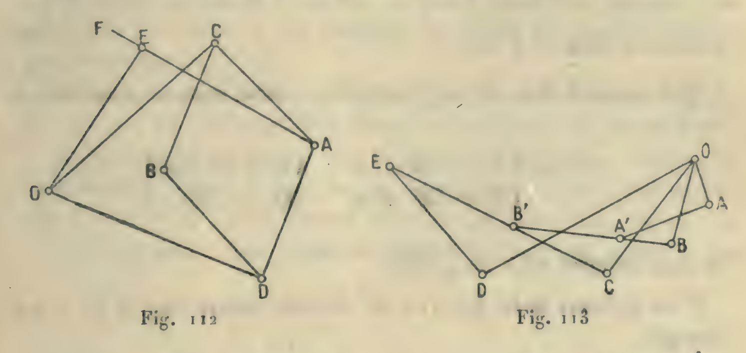


Fig. 112

Fig. 113

teurs. Ainsi celui de Kempe (fig. 90), donne $FCH = \frac{1}{3}$ FCB, si on a :

$$BC = CF = FH = EA = CD = 2,$$
$$AB = AD = \sqrt{5} + 1, \quad ED = EF = AH = \sqrt{5} - 1.$$

5° Celui de la fig. 93 serait encore plus commode. Les longueurs relatives étant

$$OB = BD = ED = AF = BC = 1,$$
$$AO = FE = GE = \sqrt{5} - 1, \quad CG = AB = \sqrt{5} + 1,$$

on aura $COB = \frac{1}{3}$ COE.

(1) Le double contre-parallélogramme (*fig.* 92), complété par un losange CDOD' s'articulant en D, et en D' sur la tige CF, serait préférable : l'angle OCD serait en effet le tiers de OCB.

6° L'inverseur Hart (fig. 114) conduit aux mêmes conclusions. Si on fait

$$AB = BC = BO = OD = 1, \quad EF = 2,$$
$$AG = GF = CD = DE = \sqrt{2},$$

il viendra $GOB = \frac{1}{3} BOH$.

7° L'appareil Hart (fig. 94) peut être utilisé comme trisecteur si on a :

$$GF = GA = AN = 4, \quad AB = BC = 6,$$
$$CE = EF = 2, \quad AD = CD = 3,$$

on aura en effet $NGA = \frac{1}{3} NGF$.

8° Le système de la fig. 115 est dans le même cas, si on a par exemple

$$AH = HB = HG = 5, \quad AF = FD = FG = 4,$$
$$DO = OC = 3, \quad BC = 6;$$

E désignant le milieu de DB, l'angle GDO est le tiers de GCO.

9° On pourrait imaginer beaucoup d'autres combinaisons permet-

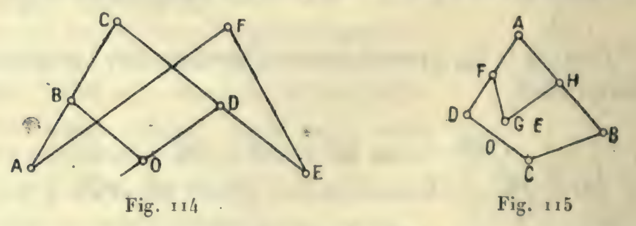


Fig. 114 Fig. 115

tant de réaliser la trisection de l'angle. Mais on se bornera pour conclure, à signaler le *multisecteur* de St-Loup, dont le principe consiste à utiliser les propriétés de la fig. 34, en faisant, à l'aide de guidages, décrire des droites aux points B, C, D,... on conçoit tout l'embarras que présenterait un tel appareil, et combien les trisecteurs gagnent en simplicité à mesure que leur théorie devient

plus élevée. Cette remarque s'applique d'ailleurs à tous les systèmes de ce genre.

Ellipsographes. Schooten a montré que si une pointe d'un compas reste fixe et que l'autre se meut sur une droite passant par ce point, tout point de la deuxième branche décrit une ellipse. C'est ainsi que Peaucellier a été conduit, en 1873, au premier ellipsographe connu (fig. 116).

On en a d'autres avec le guidage Hart et avec les appareils fig. 89, 90, 91, 92, 93. La lettre M indique partout la pointe traçante.

M. Darboux a remarqué que si l'appareil Hart (fig. 117) est un rhomboïde, le point F se meut sur la perpendiculaire à AB passant par A. Donc GF = GA et tout point de GF décrit une ellipse ([1]).

Limacographes. Les appareils précédents ont été proposés par

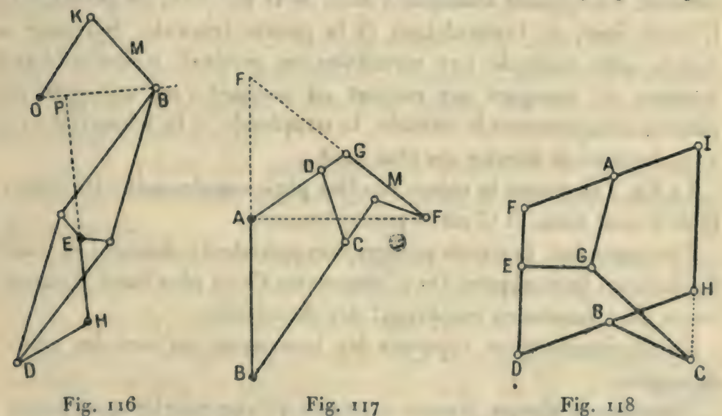


Fig. 116 Fig. 117 Fig. 118

Hart et Kempe pour le tracé du limaçon ; on rend fixes dans ce cas, les branches CF (fig. 89), BC (fig. 90), BG (fig. 91), EF (fig. 92), BC (fig. 93) et GF (fig. 117).

Conchoïdographes. On appelle ainsi les appareils qui tracent une courbe dont tous les rayons vecteurs sont ceux d'une courbe donnée,

([1]) On a encore un ellipsographe élémentaire avec la figure 111, en ajoutant les tiges O″A, O″I et fixant la tige OE.

augmentés ou diminués de longueurs constantes ; ils se distinguent, suivant ces deux cas, en *protracteurs* ou en *rétracteurs*.

Tout guidage peut se transformer en conchoïdographe ; c'est ainsi que Peaucellier a complété le sien en prolongeant la tige AO en une équerre AOGM : le point C étant fixe, les points G et M décrivent deux courbes conchoïdes l'une de l'autre.

On peut imaginer beaucoup d'autres conchoïdographes : par exemple la fig. 118 déduite de la fig. 93 en est un assez simple. On a parlé plus haut de celui de la fig. 111.

De là, d'autres moyens de décrire le limaçon, qui est une conchoïde du cercle.

Tracé des cissoïdales. Peaucellier a proposé pour le tracé de la cissoïde, un appareil analogue à celui de la fig. 112, les points A et E étant fixes, et l'articulation O la pointe traçante. Sylvester a étendu cette méthode aux cissoïdales en général, c'est-à-dire aux inverses de coniques par rapport au sommet ; on sait que ces courbes comprennent la cissoïde, la strophoïde et la trisectrice : on a vu du reste ce dernier cas plus haut.

La fig. 115 donne le même résultat plus simplement : les points D et C sont fixes, et G est la pointe traçante.

Conicographes. Les trois paragraphes précédents donnent le tracé des inverses de coniques. On a, comme on l'a vu plus haut, d'autres tracés plus simples en employant des rhomboïdes.

En adjoignant à ces appareils des inverseurs, on aura des conicographes.

Théorème de Kempe. Kempe a prouvé qu'une courbe quelconque peut toujours être tracée à l'aide d'un système articulé convenablement combiné.

Description du plan. La première idée est de faire tourner un rectangle autour d'un de ses côtés. On verra tout à l'heure une solution bien meilleure.

Pantographe de l'espace. L'appareil de Colas, pour la réduction des statues, n'est autre chose qu'un pantographe complété par un joint de Cardan.

Sphérographe. Pour décrire une sphère dont le centre est inaccessible ou dont le rayon est très grand, on se servira de ce théorème de M. Darboux : *si trois points fixes d'une droite se meuvent sur des sphères dont les centres sont en ligne droite, tout autre point de cette droite décrira une sphère, de sorte que par un choix convenable des données, un certain point décrira un plan.*

Le plan peut ainsi être décrit par un système de quatre tiges. Manheim a fait voir qu'une droite dans l'espace peut être décrite par un appareil à huit tiges.

Ellipsoïdographe. La surface de l'ellipsoïde étant le lieu des points d'une droite dont trois points fixes décrivent des plans, d'après ce qui précède, on peut décrire cette surface avec un appareil de douze tiges.

Hyperboloïde articulé. Ce système donne, dans toutes ses déformations, des hyperboles homofocales (Greenhill). Manheim a ramené ce théorème et plusieurs autres à la théorie des déformations du parallélogramme gauche.

Octaèdre articulé. On peut voir dans le *Journal de Math.* année 1897, une étude de M. Bricard sur diverses propriétés intéressantes de ce système.

Théorème de Kœnigs. On peut toujours, à l'aide de systèmes articulés, réaliser un mouvement algébrique quelconque, et en particulier, décrire toute surface ou toute courbe dans l'espace.

Conclusion. Malgré des travaux déjà nombreux, la théorie des systèmes articulés n'a pu encore se faire jour. Ce qu'on en connaît n'est qu'une collection de problèmes utiles et des plus intéressants, mais sans liens entre eux. Toutefois il est permis de penser que le principe de la transformation des figures y joue un grand rôle, particulièrement les transformations vectorielles, de la forme $F(\rho, \rho') = 0$.

Parmi ses applications, il y aurait aussi à mentionner son extension aux systèmes de triangles articulés (Sylvester), aux équipollences (Darboux), à la représentation des fonctions elliptiques (id.); l'étude du degré de mobilité des systèmes; le tracé approximatif

des courbes (Watt, Tchébichef, Léauté); l'application aux arts mécaniques et aux instruments de physique et de géométrie, les *planimètres*, les *intégrateurs*, les *dérivateurs*, les *perspectographes*, etc.; l'étude des cas particuliers donnant des systèmes déformables quand le système général ne l'est pas (Kempe, Burmester).

On peut étudier cette très intéressante théorie dans les opuscules de Kempe, St-Loup, J. Neuberg, divers articles de M. Darboux, la *Cinématique* de Kœnigs, etc.

Méthodes élémentaires de calcul du nombre π. — Comme ont sait, c'est Archimède qui le premier a trouvé le moyen d'arriver à une connaissance de ce nombre de plus en plus approchée; il considère la longueur de la circonférence comme étant comprise entre celles des périmètres de polygones réguliers inscrits et circonscrits. Si le nombre des côtés va toujours en doublant, — ce qui permet de déduire aisément chaque couple de périmètres du couple précédent, — les deux limites se rapprochent de plus en plus. Archimède a trouvé ainsi la relation $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Les formules qu'il emploie sont ainsi

$$(1) \qquad \gamma^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}\right), \qquad \Gamma = \frac{rc}{r + \sqrt{r^2 + \frac{c^2}{4}}}$$

c et γ désignant les côtés de deux polygones semblables inscrit et circonscrit; C et Γ, ceux des polygones réguliers d'un nombre double de côtés.

Huygens (*De circuli magnitudine inventa*, Leyde, 1654) a donné une ingénieuse méthode permettant d'abréger considérablement le calcul d'Archimède. Il fait voir d'abord [1] que *le produit* AE.EC

[1] Pour plus de détails, voir *Prog. Mat.* 1900, p. 273 et seq.

(fig. 119) *de la demi-corde par la flèche d'un arc est inférieur à huit fois le produit* AD.HD *de la demi-corde de l'arc double par la flèche correspondante*; d'où, en nommant x, a, b, c,... la surface du cercle et celles des polygones inscrits de n, $2n$, $4n$, $8n$,... côtés, la relation $b - a < 4c - 4b$, ce qui donne, en changeant a en b, c, d,..

(2) $$x > \frac{4b - a}{3}$$

En second lieu, *si du point* T *situé sur le prolongement du rayon* OC, *on mène des tangentes* TA, TB, *que rencontre en* M *et* N *la tan-*

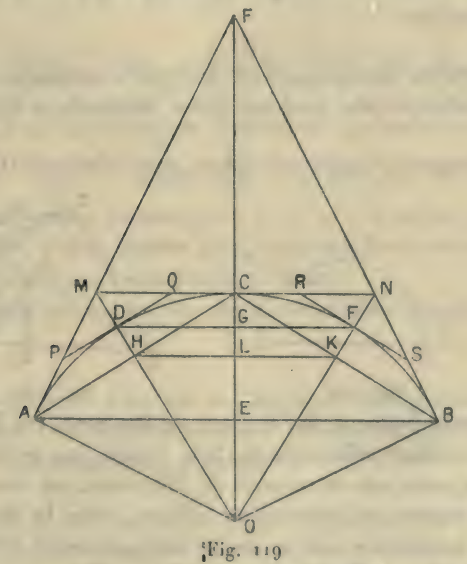


Fig. 119

gente en C, *et que* E *soit l'intersection de* OT *et de* AB, *on aura* $2.MN.TC > AB.CE$: d'où, en appelant A, B, C,... les polygones circonscrits de n, $2n$, $4n$,... côtés, $2A - 2B > b - a$, et de là

(3) $$x < \frac{2A + a}{3}$$ [1]

[1] On a aussi ces deux relations dues à Gregory (voir plus loin) et à

De ces deux inégalités, on déduit les suivantes

$$(4) \qquad \frac{8.BC - AB}{3} < \text{arc } AB < \frac{2.EB + TB}{3} \text{ (}^1\text{)}$$

Huygens en tire la démonstration de ces deux théorèmes donnés sans preuve suffisante par Snellius (*Cyclometricus*, Leyde, 1621) : *une corde* EH (fig. 120) *coupe en* D *le prolongement du diamètre* BCA, *et en* F *la tangente en* A ; *si* BD = BC, *l'arc* AE *est plus grand que* AF, *et si* HD = BC, *le même arc est plus petit que* AF. On conçoit combien les limites données par la méthode d'Archimède sont de la sorte rapprochées.

Descartes dans ses *Op. posth.* a indiqué la méthode des isopérimètres, développée plus tard par Euler, Montucla et Schwab.

James Gregory (*Vera circuli et hyp. quad.* Padoue, 1667) s'inspi-

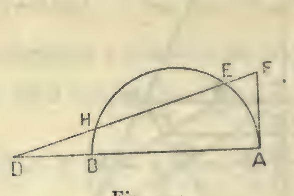


Fig. 120

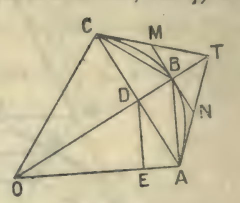


Fig. 121

rant vraisemblablement de l'ouvrage de Huygens, eut l'idée d'opérer sur les surfaces elles-mêmes. Son travail qui ne le cède pas à celui de Huygens sous le rapport de l'élégance, est beaucoup plus général. Il repose sur le théorème suivant, dont la démonstration est presque immédiate : *soit un arc de conique à centre* ABC (fig. 121);

Dellac (*Nouv. An.* 1860), et permettant de voir combien rapidement diminuent les différences A — *a*, B — *b*, ... A — B, B — C, ...

$$A - a > 4\,(B - b), \qquad A - B > 4\,(B - C)$$

(1) C'est l'équivalent de la formule $4 \sin \omega - 2 \sin \frac{1}{2} \omega < 3\omega < 2 \sin \omega + \operatorname{tg} \omega$, qu'on démontre de plusieurs façons.

joignons le centre O *au milieu* D *de la corde* AC *et menons les tangentes* TC, TA, MBN*; 1° le quadrilatère* OCBA *est moyen proportionnel entre le triangle* OCA *et le quadrilatère* OCTA [1]*; 2° le pentagone* OCMNA *est moyen harmonique entre les quadrilatères* OCTA *et* OCBA. De là, en reprenant les notations de tout à l'heure, la série

$$b = \sqrt{aA}, \quad B = \frac{2Ab}{A+b}, \quad c = \sqrt{bB}, \quad C = \frac{2Bc}{B+c}, \dots$$

dont les termes tendent vers l'expression du secteur de manière à n'en différer qu'aussi peu qu'on veut. Gregory montre ensuite qu'on a

$$\frac{\pm(c-b)}{\pm(b-a)} \gtrless \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\pm(A-B)}{\pm(b-a)} \gtrless \frac{1}{2} \,[2] \quad \begin{pmatrix}\text{ellipse}\\ \text{hyperbole}\end{pmatrix}$$

et tire de là ce théorème que *l'expression du secteur est comprise entre* $\frac{2A+a}{3}$ *et* $\frac{4b-a}{3}$. L'usage de ce théorème est aisé à concevoir : partant des valeurs initiales $a = 2$, $A = 4$, il arrive après quatorze duplications, à deux limites qu'il ramène à deux autres ayant leurs quatorze premières décimales communes.

Il emploie de même ces deux théorèmes au calcul des logarithmes.

Saurin (*Mém. de l'Ac. des sc.*, 1723) a montré que les formules (1) peuvent être avantageusement remplacées par les suivantes, bien plus commodes pour le calcul

$$(5) \qquad \Gamma = \frac{2c^2}{C+c}, \qquad 2\gamma^2 = c\Gamma$$

[1] Cela résulte de la relation $OB^2 = OD.\,OT$.

[2] A cause des relations

$$a = b\left(\frac{2b^2}{c^2} - 1\right) \quad \text{et} \quad B = \frac{2b^2}{a+b}$$

on a aussi :

$$\frac{\pm(C-B)}{\pm(B-A)} \lessgtr \frac{1}{4} \quad \begin{pmatrix}\text{ellipse}\\ \text{hyperbole}\end{pmatrix}$$

ce qui résulte de la similitude des triangles OTA, OBP, BTS et ASR, BAP (fig. 122).

Euler, dans les *Novi Com. Ac. Petr.*, pour 1763, a étudié la méthode de Descartes. Il en a déduit les formules connues.

$$(6) \qquad r' = \frac{r + R}{2}, \qquad R' = \sqrt{Rr}$$

et en a déduit la sommation de nombreuses séries trigonométriques, ainsi qu'une construction qu'on verra plus loin.

Montucla, dans ses éditions des *Récr. Math.* d'Ozanam, dont la première est de 1775, montre que si OA (fig. 123) est le demi-côté

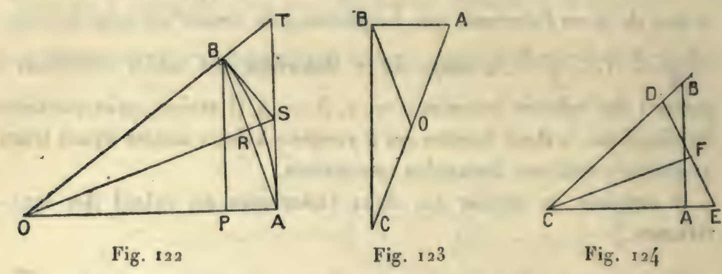


Fig. 122 Fig. 123 Fig. 124

d'un polygone régulier inscrit, et C l'extrémité du diamètre qui lui est perpendiculaire, AC est le diamètre du cercle circonscrit au polygone isopérimètre ayant un nombre de côtés double.

Jusqu'ici, on a, pour le calcul du nombre π, trois méthodes : celle d'Archimède, d'après laquelle on cherche la longueur d'une circonférence dont le rayon est donné, perfectionnée par Snellius, Huygens et Saurin ; 2° celle de Descartes, qui, renversant le problème, prescrit de calculer le rayon connaissant la circonférence ; 3° celle de Gregory, qui cherche l'aire du cercle dont on donne le rayon. Il restait une quatrième méthode, la recherche du rayon du cercle dont la surface est donnée : c'est celle de Legendre, qui l'a

fait connaître dès la première édition de sa *Géométrie*, parue en 1794.

Legendre considère le triangle rectangle ABC (fig. 124) et le triangle isocèle équivalent CDE, dont la hauteur est CF ; on aura :

$$CD^2 = CA.CB, \qquad CF^2 = CA.\frac{CA + CB}{2}$$

et on agira comme tout à l'heure (1).

La méthode des isopérimètres a été présentée didactiquement par Schwab (*El. de Géom.* Nancy, 1815) telle qu'on l'enseigne aujourd'hui, ce qui dispense d'en dire davantage (2).

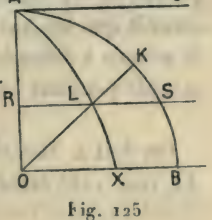


Fig. 125

Bien que les solutions graphiques du problème de la quadrature du cercle n'aient aucune valeur pratique, elles méritent cependant une mention dans un recueil tel que celui-ci.

La *quadratice* imaginée par Hippias pour résoudre la trisection de

(1) Soient A,B,C, ... les rayons des cercles inscrits successifs et a, b, c, ... ceux des cercles inscrits, on aura :

$$\frac{A - a}{B - b} > 4 \qquad \text{(Jubé, } \textit{Nouv. Ann.} \text{ 1848)}$$

$$\frac{A - B}{B - C} > 4, \qquad \frac{b - a}{c - b} > 4, \qquad \frac{A - B}{b - a} > 2.$$

La première de ces inégalités donne la relation $4b - a > 3x > 4B - A$, et la dernière, la relation $3x < A + 2a$, que Legendre prend comme une égalité approximative, quand les nombres A et a ont un grand nombre de décimales communes.

(2) Les trois premières et la dernière formules du renvoi précédent ont également lieu ici et sont dues, la première à Bellion (*Nouv. An.* 1847), la deuxième et la troisième à D. André (*id.* 1871 et 1874), la dernière à Rouché (*id.* 1882). On a en outre

$$\frac{A - B}{b - a} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 3x < 2A + a.$$

Cette dernière a été traitée par Gergonne comme une approximation.

l'angle, est le lieu ALX de l'intersection du rayon OK (fig. 125) et de la parallèle RS à OB se mouvant uniformément de telle manière que, partant de la position initiale OA, AC, ces deux droites arrivent ensemble à la position OB, OB.

Dinostrate paraît avoir remarqué le premier que X étant le point où la courbe coupe le rayon OB, la demi-circonférence décrite sur OX comme rayon est égale à OB. Cette curieuse propriété n'est d'aucun usage, car s'il est facile d'obtenir autant qu'on veut de points tels que L (1), le point X ne peut être obtenu avec précision, puisqu'en cet endroit les deux droites mobiles se recouvrent. On conçoit que les Anciens durent être frappés de cette obstination de la science à défendre son secret, et quel aiguillon elle fut pour les savants pendant les deux mille ans qui suivirent.

On doit à Descartes une construction d'un tout autre genre : AK (fig. 126) étant la diagonale du carré FB, si on inscrit dans

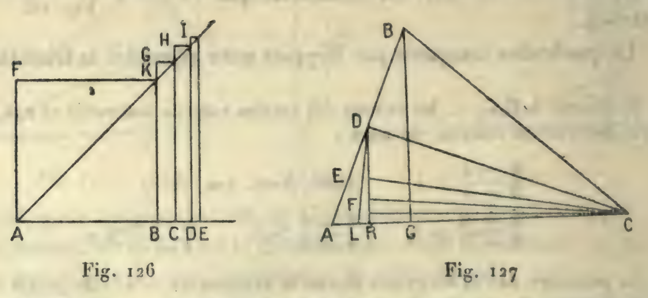


Fig. 126 Fig. 127

l'angle KAB les rectangles GC, HD, IE,... respectivement égaux au quart du carré, du rectangle GC, du rectangle HD,... les longueurs AC, AD, AE,... représenteront les apothèmes des polygones réguliers de huit, seize, trente-deux,... côtés isopérimètres au carré.

(1) En effet cela revient à diviser le quadrant AB en n parties égales AF, FG, GH, ... et le rayon OA de même en n parties égales AP, PQ, QR, ... tirer les rayons OF, OG, OH, ... que rencontrent en J, K, L, ... les parallèles à OB menées par les points P, Q, R, ...

Jean Bernoulli a donné la suivante en 1707 : soit ABC (fig. 127) un triangle isocèle, abaissons la perpendiculaire BG sur AC et la perpendiculaire CD sur AB ; menons CL = CD et projetons C en E sur DL ; menons CM = CE et projetons C en F sur EM ; et ainsi de suite indéfiniment. Les points B, D, E, F,... sont sur une même quadratice, qui coupe AC en un point R tel que l'arc de rayon CR et ayant BCA comme angle au centre, a un développement égal à AB.

On a aussi d'Euler celle-ci, cas particulier de la précédente : soient PCE un angle de 45°, QC, RC, SC,... ses bissectrices successives ; si on a de plus les perpendiculaires

$$QF = \frac{1}{2} PE, \qquad RG = \frac{1}{2} QF, \ldots$$

les points P, Q, R,... sont sur une même quadratice et les longueurs CE, CF, CG,... tendent vers une limite CX égale au rayon du cercle isopérimètre.

Gergonne (*Ann. de Math.* t. IV, 1815) a fait remarquer que étant

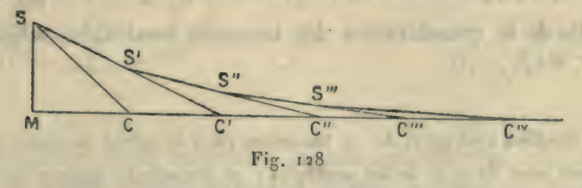


Fig. 128

donné le triangle isocèle rectangle SMC (fig. 128), si on prend $CC' = CS$, que S' soit le milieu de $C'S$, $C'C'' = C'S'$, que S'' soit le milieu de $S'C''$, $C''C''' = C''S''$, que S''' soit le milieu de $S''C'''$,... les longueurs CC', $C'C''$, $C''C'''$,... tendront vers celle du rayon du cercle dont la circonférence est égale à SM.

Enfin on citera la méthode indiquée pour la première fois par

Outhier pour obtenir la rectification d'un arc de cercle O*a* (fig. 129) de rayon OA : on prend OB = 2.OA, OC = 4.OA, OD = 8.OA,... et on décrit successivement les arcs égaux O*b*, O*c*, O*d*,... qui tendent à se confondre avec la perpendiculaire OX égale à l'arc donné O*a*.

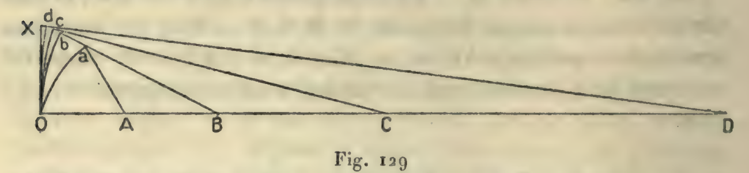


Fig. 129

Les points *a*, *b*, *c*,... sont sur une même *cochléoïde*, courbe inverse de la quadratrice.

Divers moyens d'arriver à la mesure de la sphère. — Archimède trouve le volume de la sphère à peu près comme on le fait aujourd'hui ; quant à la surface, il y arrive en utilisant ce curieux théorème : *soit le polygone* AΓ (fig. 130) *d'un nombre pair de côtés ; on a pour l'expression de la somme* EK + ZΛ + BΔ + HN + ΘM, *des cordes perpendiculaires au diamètre* AΓ, *la formule* $\frac{E\Gamma . A\Gamma}{EA}$, ce qui résulte de la considération des triangles semblables AEΞ, ΞKO, ZOΠ, ΠΛP,... [1].

[1] Snellius s'est servi de ce théorème pour le calcul du sinus de $\frac{\omega}{2}$ connaissant ceux de ω et de ses multiples ; et Roberval, comme on le verra plus loin, en a déduit la quadrature de la sinusoïde.

Aujourd'hui on calcule les expressions Σ sin *n* ω et Σ cos *n* ω, d'après Euler, soit en se servant des formules de Th. Simpson, soit en transformant ces expressions en exponentielles imaginaires.

Lecointe (*Nouv. Ann.* 1842) a fait voir que *si on divise une demi-circonférence en un nombre impair de parties égales aux points* A, B, C, ... K, L, ... U, V, X, *et si on joint au centre* O *les deux divisions centrales* K, L, *les parties des cordes* AX, BV. CU, ... KL, *comprises dans l'angle* KOL, *sont ensemble égales au rayon.*

Pappus a apporté quelque perfectionnement à cette méthode d'Archimède, mais il faut venir jusqu'à Kepler pour voir de nouveaux principes appliqués à cette théorie. Ce grand homme abordant franchement l'idée de l'infini, suppose la sphère composée d'une infinité de pyramides ayant leurs sommets au centre [1], ce qui lui donne la relation simple qui existe entre la surface et le volume de la sphère (*Nova stereometria doliorum*, Linz, 1615). Il montre aussi l'égalité de deux solides coupés sous des sections égales par des plans parallèles, idée facile à étendre au cas où les sections sont, non plus égales, mais en proportion constante.

Kepler fait une application de cette théorie à la recherche du volume du *tore* [2] et incidemment à celui de l'*onglet* cylindrique.

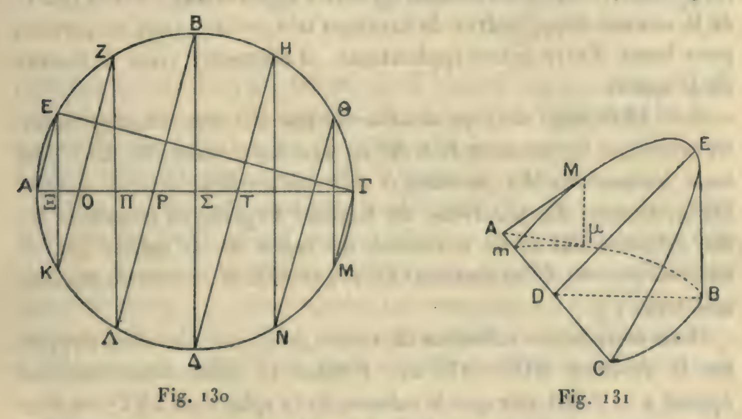


Fig. 130

Fig. 131

Voici un aperçu de sa méthode : la hauteur BE (fig. 131) d'un cylindre est égale à la circonférence de la base ; un plan qui le coupe en passant par un diamètre et par le point E détermine l'onglet ; le plan M m μ perpendiculaire au plan AEC, coupe l'onglet suivant

[1] Les Indiens, comme on l'a su depuis, avaient déjà utilisé des idées analogues.

[2] *Annulus* ou *annulus arduus* selon que la ligne tournante est une circonférence ou une ellipse.

un triangle équivalent au cercle ayant $m\mu$ pour rayon. Le volume de l'onglet est donc égal à celui de la sphère.

De là la mesure d'un onglet quelconque, car le volume de ce solide est proportionnel à sa hauteur.

Kepler avait dans son ouvrage, posé un grand nombre de problèmes que, sauf un seul, — la recherche du volume du tore — il avait laissé sans solution. Cavalieri dès 1629, s'attacha à l'étude de ces problèmes et découvrit sa célèbre méthode des *indivisibles*, développée dans sa *Geometria indivisibilibus* (Bologne 1635). Il assimile un volume à la somme (*omnia plana*) de surfaces planes infiniment rapprochées, ou plutôt, comme on dirait aujourd'hui, — à la limite de la somme des cylindres de hauteurs très petites ayant ces surfaces pour bases. Entre autres applications, il démontre ainsi la mesure de la sphère.

Soit AED (fig. 132) *un demi-cercle (ou une demi-ellipse), auquel on circonscrit le rectangle* BD. *Si on tire les droites* OB, OC, *pour toute transversale* MN *parallèle à* AD, *on a* : $MR^2 = PR^2 + QR^2$. De là, à cause du théorème de Kepler, l'égalité de la section MN du cylindre BD et de la somme de celles de la sphère (ou du demi-ellipsoïde) ZT et du cône QC, et par suite la mesure du segment sphérique ([1]).

Dans deux autres solutions du même problème, Cavalieri s'appuie sur la relation $RT^2 = IR . RJ$, J étant le point diamétralement opposé à I ; il fait voir que le volume de la sphère ou ΣRT^2 est ainsi représenté par la somme $\Sigma\pi . IR . RJ$, somme qu'il calcule géométriquement et qui revient, comme on sait, à l'intégrale $\pi\int x(1-x)\,dx$. (Voir *J. de math. élém.* 1897, p. 114).

Torricelli (*opera geometrica*, Florence, 1644) a imaginé un autre

([1]) G. de St-Vincent a déterminé de même le volume de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes. Le *tympanum* (hyperboloïde de révolution à une nappe) se traite aussi de même.

procédé très curieux mais moins général, dont voici les applications les plus simples.

1° Considérons la demi-sphère AB (fig. 133) et le cône ADC dont la hauteur est égale au rayon de la sphère. Le cylindre inscrit MN a pour surface extérieure π. MN. MP. Or, celle du cercle correspondant PQ dans la sphère est $\pi . PQ^2 = \pi . AP . PB = 2\pi . MP . PB$. Si donc on considère le cône comme formé de tubes tels que PN,

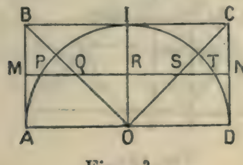


Fig. 132

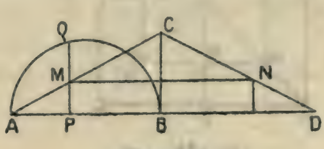


Fig. 133

rentrant les uns dans les autres, et la sphère comme des disques très minces tels que PQ empilés les uns contre les autres, les volumes de ces tubes et de ces disques seront égaux, puisque les épaisseurs sont les mêmes. De là, l'égalité des deux volumes.

2° Dans le triangle rectangle isocèle ACF (fig. 134) on a π. MP. MQ $= 2\,(\pi . QC^2)$. Or, si on fait tourner la figure autour de CD, et qu'on considère le volume produit par la rotation de BAC comme formé de tubes cylindriques, celui qui correspondra à MQ aura une surface égale à π. MP. MQ, c'est-à-dire égale à celle du cercle MP. L'épaisseur du tube étant égale à celle de la tranche MP [1], la

[1] Si BD était un rectangle quelconque, les tubes du solide concave et les tranches du cône n'auraient plus les mêmes épaisseurs ; celles-ci seraient dans le rapport de AD à CD, mais alors les expressions π.MP.PQ et $2\pi . QC^2$ étant dans le rapport de CD à AD, on a :

$$\frac{\text{tube MQ}}{\text{tranche MP}} = \frac{CD}{AD}\frac{AD}{CD} = 1$$

c'est-à-dire la conclusion de Torricelli, qui semble du reste s'être rendu compte de cette généralisation de sa méthode.

Le défaut de la méthode des indivisibles — dans laquelle on fait abstrac-

somme des tubes, ou le volume du solide concave est donc double de celle des seconds, qui représente le volume du cône. Celui-ci est donc le tiers du cylindre circonscrit.

3° Soit le triangle rectangle isocèle ABC (fig. 135) sur le côté BC duquel, comme diamètre, on trace une circonférence. Si l'on fait tourner la figure autour de BC, comme $2.MP^2 = 2.BP.PC = NQ.NS$

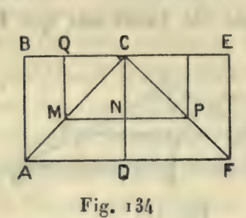


Fig. 134

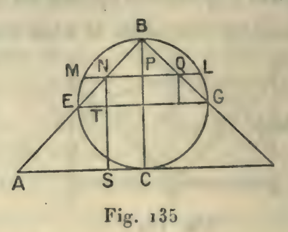


Fig. 135

on conclut que le volume du cône est double de celui de la sphère.

4° Dans la même figure, on a :

$$MP^2 - NP^2 = (MP + NP)(MP - NP) = MN.NL = EN.NB = NQ.NT.$$

Donc la couronne MN est égale à la surface extérieure du cylindre TQ, et le volume de la demi-sphère est le double de celui du cône EBG.

C'est Wallis (*op. cit.*) qui le premier est parvenu à l'expression du volume de la sphère par un calcul algébrique, qui n'est autre que celui de l'intégrale $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx$.

Gergonne (*Ann. de math.* t. XIII) a montré comment on peut déduire de la mesure de l'onglet celle du fuseau sphérique, mais sa

tion des épaisseurs des tranches considérées — était d'exiger implicitement que ces tranches aient même épaisseur ; autrement on arrivait à des absurdités. La méthode infinitésimale exprime explicitement les infiniment petits.

démonstration n'a pas et ne semble pas pouvoir offrir toute la rigueur désirable pour une démonstration élémentaire.

Mesure de l'onglet. — On a défini plus haut ce corps, appelé aussi en architecture *trompe, voûte d'arête* ou *arc de cloître*, suivant sa disposition.

G. de Saint-Vincent a traité directement la mesure de l'onglet (*ungula*) déterminé par un plan incliné à 45° sur la base, cas auquel se ramènent tous les autres. On peut présenter sa théorie ainsi [1], (*Opus geometricum,* Anvers 1647).

Soient deux figures planes ACB, ADB (fig. 136) de même hau-

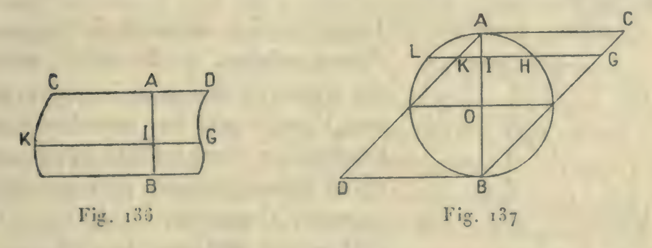


Fig. 136 Fig. 137

teur AB. Une perpendiculaire KIG à AB coupe les deux surfaces suivant les lignes KI, IG ; on relève IG perpendiculairement au plan de la figure ABC et on achève le rectangle des deux droites GI, IK. Le solide formé par des constructions semblables répétées à tous les points de AB se désigne par l'expression ADB *ductum in* ACB. Ainsi si ABC est un cercle et ADC un rectangle, le solide est un cylindre ; si les deux figures sont des carrés ou des triangles rectangles, placés de même (ayant tous deux leur sommet en B), le solide est un cube ou une pyramide à base carrée ; dans le cas de deux triangles ADB, ACB (fig. 137) tournés inversement, le solide est un tétraèdre ;

[1] On voit cette construction dans Cavalieri, mais c'est G. de St-Vincent qui en a tiré ses conséquences, souvent très remarquables (Voir *J. de Math. él.* 1897, p. 162 et seq.).

si les deux figures sont des demi-circonférences, comme ALB, AHB, le solide est l'assemblage de deux onglets à 45° (fig. 138).

On a (fig. 137), KI. IG = LI. IH : le volume de l'onglet à 45° est donc égal à la moitié de celui du tétraèdre ([1]), c'est-à-dire à $\frac{2}{3}$ OA^3. De là le volume d'un onglet de hauteur quelconque, ou ayant pour base un segment quelconque.

Passant de cet onglet à celui de Kepler, on aurait une nouvelle cubature de la sphère donnée dans l'opuscule *Diverses quadratures*... par Clairaut, le cadet ([2]), (Paris, 1731); mais ce procédé s'éloignait trop de ceux de la géométrie ancienne pour que G. de saint Vincent s'en servît.

De même, la surface de l'onglet se tire aisément de l'expression de son volume, de la même manière que Kepler le fait pour la sphère, puisque l'onglet peut être considéré comme l'assemblage d'une infinité de pyramides ayant même hauteur et leur sommet commun. Cependant G. de Saint-Vincent préfère appliquer la méthode, très belle mais très prolixe des Anciens au théorème d'Archimède rappelé au commencement de la note précédente, ce qui est d'ailleurs la voie directe pour arriver à la connaissance de la surface de l'onglet ([3]).

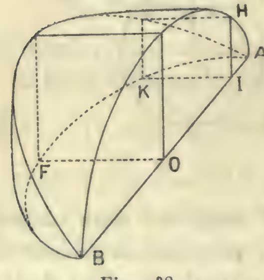


Fig. 138

([1]) On a voulu seulement donner ici une idée de la méthode *ductus plain in planum* et des facilités qu'elle donne pour la description et le mesurage de certains corps, onglets de cylindre parabolique ou hyperbolique, etc.

([2]) Cet ouvrage, d'un géomètre de quatorze ans, contient différents problèmes sur les lunules, leur partage, les lunules elliptiques et hyperboliques quarrables, les additions de segments et la construction de différentes courbes. On sait que son frère aîné lisait à dix ans l'*Anal. des inf. petits*, de l'Hospital, et qu'il publia à seize ans son célèbre *Traité des courbes à double courbure*.

([3]) Ce théorème d'Archimède peut conduire également à la mesure du

Pascal (*Traité de la roulette*, Paris 1658) a remarqué que le volume et la surface extérieure d'un tronc de prisme quelconque ont pour mesure le produit de la section droite ou de son périmètre par la hauteur correspondant au centre de gravité de la surface ou du périmètre. On a ainsi un autre moyen d'arriver à la mesure de l'onglet : on n'abrégerait d'ailleurs nullement ainsi la recherche, car la connaissance des deux centres de gravité demande des calculs qui sont absolument ceux de G. de Saint-Vincent.

Construction mécanique de certaines courbes. — Les Anciens se sont-ils préoccupés de tracer les courbes qu'ils avaient imaginées autrement que par points isolés? La chose est probable mais le peu d'élégance des constructions qu'ils auront ainsi trouvées les a fait oublier (1). La quadratrice, la spirale et l'hélice peuvent être définies cinématiquement, mais la mécanique pratique était alors trop peu avancée pour qu'on pût penser au tracé effectif de ces courbes transcendantes. Le premier instrument de ce genre est celui de Nicomède propre au tracé de la conchoïde et formé d'une règle mobile passant toujours par un point fixe, tandis que l'un de ses points suit une droite fixe et qu'un de ces autres points trace la courbe.

Proclus décrit un *ellipsographe*, qui paraît lui être bien antérieur ; c'est en principe une droite qui a deux de ses points assujettis à rester sur deux droites rectangulaires : tout autre de ses points décrit une ellipse (2).

volume de l'onglet : désignant en effet par ε, ζ, β, η, θ, ... les sommets des génératrices des points E, Z, B, H, Θ (*fig.* 130), le prisme tronqué inscrit dans l'onglet aura pour volume la somme des prismes triangulaires tronqués ΑΕΣ, ΕΖΣ, ΒΖΣ, ΗΒΣ, ΘΗΣ, ΓΘΣ, somme aisée à évaluer.

(1) Eratosthène, cité par Eutocius, paraît dire que Ménechme traçait mécaniquement les coniques qui résolvaient le problème de Delos, et Pappus dit expressément qu'il n'est pas facile de décrire ces courbes, ce qui montre l'existence de recherches sur ce sujet.

(2) Pratiquement, on emploie une simple bande de papier sur laquelle on a marqué les longueurs des demi-axes, et on opère de même.

Peu après, Isidore inventa pour le tracé de la parabole, un instrument qui ressemblait à la lettre λ. Il y a lieu de croire que ce *parabolographe* est le même que Woepke (l'*Alg.* d'Omar Alkayyami, Paris, 1851) a trouvé employé chez les Arabes, pour le tracé des coniques. Il consiste en un compas dont une branche porte une pointe traçante pouvant s'allonger à l'aide d'un ressort, de manière à toujours s'appuyer sur le papier, tandis que l'autre branche est fichée obliquement dans le plan de celui-ci.

Les Arabes connaissaient également l'emploi de fils pour le tracé des mêmes courbes ; du moins voit-on dès le IXe siècle, indiqué comme connu le tracé de l'ellipse dit *ovale des jardiniers*.

Léonard de Vinci (fin du XVe siècle) a inventé un *tour à ovale*, qui est l'inverse du procédé de Proclus ; la droite KLM étant fixe, un angle droit se meut dans son plan, de manière que ses côtés passent respectivement part les deux points K et L ; le point M trace une ellipse sur le plan de l'angle mobile.

C'est à Cavalieri que sont dus les premiers points de vue sur la définition des courbes comme intersections de droites mobiles. Il considère la parabole (*op. cit.*) comme le lieu des intersections de parallèles équidistantes et de droites concourantes qui déterminent des segments sur une de ces parallèles. Ce procédé est encore souvent employé, pour le tracé de la parabole par points.

Descartes, qui a attiré l'attention sur l'étude des courbes en général, a également montré comment on peut les définir, non seulement par des équations, mais encore par des combinaisons de règles, d'équerres et de fils. Il fait voir, dans sa *Géom.* que *si le côté* KL *d'un angle* CKL *se meut dans sa propre direction en faisant tourner une droite* GL *autour du point fixe* G, *l'intersection* M *de* GL *et de* KC *a pour lieu géométrique une hyperbole.*

Il construit la courbe $\rho \sin {}^{k}\omega = 1$ à l'aide d'un compas dont une branche est fixe et dont l'autre porte une équerre faisant mouvoir successivement $k - 1$ équerres mobiles disposées de manière à pouvoir glisser sur les deux côtés de l'angle. Cet instrument est tout théorique.

Il indique aussi le moyen suivant de tracer son *ovale* à l'aide d'un règle munie d'un fil maintenu contre elle par une pointe traçante M, ce même fil passant autour du point fixe A, puis de nouveau autour de la pointe M, pour venir s'attacher au point fixe B ; la règle tourne elle-même autour d'un de ses points qui reste fixe.

Cavalieri, dans ses *Exercitationes geometricæ* (Bologne, 1647), a défini l'ellipse et l'hyperbole comme lieux des intersections de deux faisceaux de droites déterminant sur les côtés d'un angle droit des segments égaux.

Schooten (*Ex. Math.*) a abordé la réalisation effective et pratique du tracé des coniques. Généralisant le théorème de Proclus, il remplace l'angle droit par un angle quelconque et la droite mobile par un triangle dont le sommet libre décrit une ellipse. Il propose aussi un compas dont une pointe reste fixe tandis que l'autre se meut sur une droite passant par O : tout point de la droite mobile ou qui lui est invariablement lié, décrit une ellipse,

Il a déjà été fait mention de la découverte de ce géomètre du contre-parallèlogramme et de son usage pour le tracé de l'ellipse et de l'hyperbole.

Jean de Witt, dans la deuxième édition latine de la *Géom.* de Descartes (Amst. 1659), a donné diverses généralisations des constructions de Cavalieri, entre autres, celle-ci : *un angle tourne autour de son sommet et un de ses côtés coupe une droite fixe en* H ; *par* H, *on mène, à une droite donnée, une parallèle qui rencontre l'autre côté en un point* M *dont le lieu est une conique* (1).

Barrow (*Lectiones geometricæ*, Londres 1672) a donné la construction du *cappa* $\rho = \operatorname{tg} \omega$, comme lieu du sommet d'un angle droit

(1) Newton, dans ses *Princ.* a étendu ce théorème au cas de deux angles tournant autour de leurs sommets : si deux côtés se coupent sur une même droite, les deux autres se coupent sur une même conique.

Mac-Laurin (*Geometria organica*, Londres, 1720) fait tourner les angles autour de points situés sur les côtés et obtient ainsi des cubiques et des quartiques.

dont un côté passe par un point fixe O et un point de l'autre se meut sur une droite passant par O [1].

Tschirnhaus (*Medicina mentis*, Amst. 1686), a montré à construire la tangente d'une courbe décrite par un stylet tendant un fil qui s'enroule sur des courbes fixes et autour de points également fixes. Fatio et Leibniz ont beaucoup étendu cette théorie.

Lahire a fait connaître en 1699, dans les *Mém. de l'Ac. des sc.*, l'appareil qui porte son nom et formé d'une roue A engrenant à l'intérieur d'une roue B de rayon double : tout point du plan de la première décrit une ellipse. On sait d'ailleurs que tout point de la circonférence de A décrit un diamètre de la roue B (Cardan, *Opus novum*, Bâle 1570) : c'est le premier, et longtemps le seul moyen qu'on ait eu de tracer une ligne droite.

C'est à Newton (*Arithmetica universalis*, Londres 1707), qu'on doit le moyen de décrire la cissoïde à l'aide d'une équerre OAB, dont le point B se meut sur une droite fixe D, et le côté AB passe par un point fixe O situé à une distance de D égale à la moitié de AB ; c'est le milieu de AB qui décrit la courbe [2].

Guido-Grandi a proposé, pour le tracé de l'hyperbole l'emploi d'un fil à plomb que tend une pointe traçante, pendant que le plomb se meut sur une droite (*Flores geometrici*, Florence, 1728).

On remplace souvent dans les applications industrielles, les courbes par leurs conchoïdes obliques, appelées *rosettes* et qu'on trace à l'aide d'un appareil appelé *réglette* imaginé par La Condamine en 1734 : c'est un perfectionnement du conchoïdographe de Nicomède.

Les épicycloïdes se tracent à l'aide de la *penna geometrica*, de

[1] Gutschoven avait de même étudié dès 1662, la courbe définie par cette construction (t. IV des *Œuvres complètes* de Huygens).

[2] Le lieu du sommet A est une strophoïde.

Newton a aussi considéré le lieu de l'extrémité B du côté AB d'un angle droit OAB, dont le sommet parcourt une droite, tandis que le côté OA est assujetti à passer par le point fixe O.

Suardi (*Nuovi instrumenti*, Brescia, 1752), formée de trois roues dentées A, B, C, montées sur le même bras. Le système tournant autour de la roue A, tout point du plan de C décrira une épitrochoïde : il peut donc servir en particulier pour le tracé de l'ellipse, du limaçon et des épicycloïdes.

Il a déjà été question, dans la note sur les systèmes articulés de la description d'un assez grand nombre de courbes ; avec ce qui vient d'être dit, on aura ainsi une idée suffisante de l'application de la mécanique au tracé des courbes. Toutefois il ne sera pas inutile d'ajouter quelques indications sur certains mouvents rectilignes exacts ou approchés.

Watt a donné en 1784, son *parallélogramme* bien connu, comprenant trois barres AB, BC, CD articulées entre elles et aux points fixes A et D. Le milieu de BC décrit une *courbe à longue inflexion*, laquelle, sous certaines conditions, peut être prise pratiquement pour une ligne droite. On sait qu'il s'agissait de guider le piston en ligne droite sans se servir de glissières.

Trois ans après Cartwright proposait la solution exacte résultant de l'emploi de deux roues dentées égales tirant la tête du piston, par l'intermédiaire de deux tringles d'égales longueurs articulées aux deux roues, en des points correspondants.

Le dispositif de Sarrut se compose de deux leviers articulés ABC, DEF pouvant se mouvoir dans deux plans fixes différents autour des points A et F ; une tige CD articulée à ces deux leviers sera à la fois dans ces deux plans et par conséquent ne se déplacera que dans leur intersection.

Galloway a imaginé de faire tourner une roue à deux, trois ou quatre dents dans l'intérieur d'une roue fixe de trois, quatre ou cinq dents profilées de manière à ce que le centre décrive une ligne droite. La difficulté du tracé et les frottements considérables que présenterait ce système, quoique atténués par des galets, le rendraient bien moins pratique que les glissières qu'on voulait remplacer. On a de même proposé, pour obtenir le mouvement en ligne droite, de

faire rouler diverses courbes sur d'autres courbes convenablement choisies [1] ; mais ces courbes sont généralement difficiles à tracer, et la plupart transcendantes.

On a surtout tenté de perfectionner le tracé approximatif de Watt. Le *balancier* d'Evans se compose d'un rhomboïde ABCD, dont une des grandes tiges AD est fixe, et la petite tige BC prolongée d'une longueur CF égale à elle-même. Si les tiges AB et AD sont très grandes par rapport aux autres, le point B décrit un arc de cercle assimilable à une droite perpendiculaire à AD, et par suite, le point F se meut approximativement dans la direction de AD.

Harwey a proposé d'employer un pentagone articulé dont un côté est fixe, et les milieux des deux côtés adjacents, réunis par une bride articulée.

Roberts a indiqué cette solution : un triangle isocèle DCE dont les sommets C, D sont articulés aux extrémités des tiges AD, BC, mobiles autour des points fixes A, B ; la trajectoire du sommet E diffère peu d'une ligne droite.

Tchebichef a étudié et modifié de plusieurs manières le parallélogramme de Watt. Ainsi la distance AD des points fixes étant 4, les deux manivelles AB et CD ont chacune une longueur 5 et sont croisées, comme dans le contre parallèlogramme : la bielle BC a une longueur 2 [2]. Il remplace aussi la bielle par un triangle dont

(1) C'est ce qui a lieu pour une spirale logarithmique roulant sur une droite, pour une courbe de Ribaucour, $4(\rho^2 - 1)\, ds^2 = a^2 d\rho^2$, roulant sur une hyperbole, ou une courbe de Delaunay $(y^2 + 1)\, dx = ay ds$ roulant sur une circonférence.

(2) Réunissant les milieux E et F, de BC et de CD par deux brides articulées EG, GF, la tige EG se déplacera à peu près parallèlement à AB.

Tchebichef a encore donné un autre appareil à mouvement presque parallèle, dont on se fera une idée en étudiant le système formé de deux parallélogrammes ABCD, A'B'C'D' ayant leurs côtés AB, CD, A'B'C'D' égaux et articulés entre eux, aux milieux communs des côtés AD et A'D', BC et B'C'. Les articulations C' et D étant fixes, une bride réunissant les articulations A' et B produira le mouvement.

le sommet parcourt une ligne s'approchant beaucoup plus d'une ligne droite que celle de Watt.

Quadrature géométrique de certaines courbes. — La parabole est la première courbe qu'on est parvenu à quarrer (¹). Archimède y est arrivé par deux voies différentes ; malgré son intérêt, il ne sera pas parlé de la première, afin d'abréger. Quant à la seconde, elle consiste à inscrire dans un segment un triangle maximum, ce qui donne deux nouveaux segments dans lesquels on inscrit des triangles maxima ; dans chacun des quatre nouveaux segments, on inscrit de même des triangles maxima, et ainsi de suite : le calcul est ramené à la sommation de la série

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

Archimède a quarré la spirale, en calculant la valeur de l'expression qu'on représenterait aujourd'hui par $\int x^2 dx$, valeur qu'il trouve en cherchant d'abord la somme des carrés des n premiers entiers. Il a ainsi montré que la quadrature d'une courbe définie par ses coordonnées polaires dépend de la sommation des carrés des rayons vecteurs correspondant à des angles croissant arithmétiquement.

Il avait virtuellement démontré que *toute figure sphérique se projette en vraie grandeur sur le cylindre circonscrit* (²). Papus a appliqué ce beau théorème à la courbe sphérique produite par un point mobile se mouvant uniformément sur un quadrant qui pendant le même temps, tourne d'un tour entier autour du rayon de l'origine de ce quadrant. C'est le premier exemple de quadrature d'une surface courbe.

(¹) Les *lunules* d'Hippocrate ne sont pas, à proprement parler, des surfaces quarrables, mais des surfaces rectilignes modifiées par l'addition et le retranchement de segments égaux.

(²) C'est la projection géographique dite *cylindrique*, qui conserve les aires.

Les principes utilisés dans les recherches précédentes paraissent avoir été étudiés et généralisés d'abord par Descartes. Toutefois, c'est Roberval (Mersenne, *Cogitata physicomathematica*, Paris, 1644) qui a le premier, fait connaître la parabole générale $y^n = x^m$ et sa quadrature, laquelle revient comme on sait à la formule

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1};$$

et on voit, dans les *Ex. Geom.* de Cavalieri, la première mention de cette formule et sa démonstration [1].

Roberval en 1638, et Torricelli en 1640, découvrirent la quadrature de la cycloïde, en comparant les longueurs MQ, NQ, PQ (fig. 139) déterminées par une parallèle à la base AD, dans la demi-cycloïde AMC, la *sinusoïde* ANC [2] et le demi-cercle DPC. On sait

[1] Roberval, dans une lettre à Fermat, de 1636, la présente sous la forme suivante

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k+1} > \frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} > \frac{1}{k+1}$$

qui se tire de la formule de Mac Laurin (p. 175) en faisant $a = b + 1$ et $b = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Cette démonstration est due à Schlömilch.

On peut la tirer aussi, dans le cas de k entier positif, des identités

$$1.2.3\ldots k + 2.3\ldots(k+1) + \ldots + (n-k+1)\ldots n = \frac{(n-k+1)\ldots(n+1)}{k+1}$$

$$1.2.3\ldots k + 2.3\ldots(k+1) + \ldots + n\ldots(n+k-1) = \frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{k+1}$$

Pascal a démontré la formule de Cavalieri, en 1654, en s'appuyant sur la formule, — beaucoup plus compliquée et beaucoup moins élémentaire, — donnant la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

[2] Torricelli ne fait pas intervenir explicitement la sinusoïde (op. cit.), mais sa démonstration revient à celle de Roberval. Il considère deux transversales parallèles MQ, M'Q' symétriques par rapport aux points C et D, et il ajoute les longueurs qu'elles déterminent dans la demi-cycloïde, dans le triangle ACD et dans le demi-cercle.

Le défaut de cette démonstration de Torricelli est qu'il obtient seulement

que MN = PQ, donc la surface AMNC est égale au demi-cercle CD; et, comme visiblement l'aire ANCD est égale à celle du triangle ACD, il s'ensuit que la surface AMCD est le triple du demi-cercle.

G. de St-Vincent (op. cit.), quoique ne s'étant pas occupé spé-

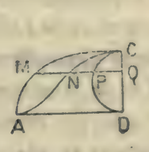


Fig. 139

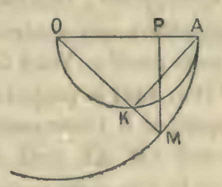


Fig. 140

cialement de quadrature des courbes, a cependant découvert plusieurs théorèmes qui s'y rattachent : sa quadrature de la surface de l'onglet revient à celle de la sinusoïde, non encore publiée. C'est lui aussi qui a le premier démontré que *deux segments de coniques compris entre deux parallèles sont égaux*, et que *si dans une hyperbole, les ordonnées à une asymptote croissent géométriquement, les trapèzes hyperboliques croissent arithmétiquement*. Enfin il semble avoir étudié sa *parabola virtualis* (¹) dans le but de représenter par sa quadrature la cubature de l'onglet.

ainsi la quadrature de toute la cycloïde, tandis que Roberval, en ramenant à la quadrature de la sinusoïde celle de la cycloïde, peut déterminer la quadrature d'une portion quelconque de cette dernière.

(¹) Cette courbe remarquable, retrouvée par Cramer, qui l'a appelée la *besace*, est le lieu du point M (fig. 141) situé sur une perpendiculaire PN à la corde circulaire OP et tel que PM = ON G. de St-Vincent a fait voir qu'elle est également le lieu des points ayant pour ordonnées la demi-somme de celles de deux paraboles GAH, EBF tournées inversement. De là sa quadrature et celle du *trifolium* $\rho = \cos \omega \cos 2\omega$,

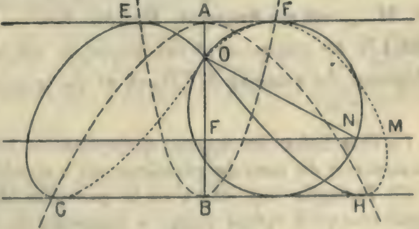


Fig. 141

La sinusoïde fut par suite appelée quelque temps la *compagne de la cycloïde*. Elle avait déja été considérée par Roberval comme produite par une surface cylindrique, à l'aide d'un compas d'une ouverture égale à son diamètre, surface qu'on déroule ensuite sur un plan. La courbe tracée sur le cylindre est en même temps une courbe sphérique (¹), comme le remarque Lalouvère (*De Cycloide*, Toulouse, 1660), qui a retrouvé et divulgué le premier la quadrature de cette courbe. Voici le procédé de Roberval et de Lalouvère : soient P (fig. 140) la projection du point M de la circonférence AM sur le rayon, et K l'intersection du rayon OM et de la circonférence OA ; les arcs AM, AK sont égaux, de même que les droites MP, AK, de sorte que si on porte perpendiculairement au plan du papier les longueurs KK' = KA et MM' = MP, les deux courbes lieux des points K' et M' coïncideront après développement des deux surfaces sur un plan. Or le premier de ces deux lieux est une cyclocylindrica et le deuxième, une ellipse limitant un onglet à 45° : ils se réduisent donc à une même sinusoïde. Roberval aurait pu déduire la quadrature de la sinusoïde de celle de l'onglet mais il procède directement, en utilisant le théorème d'Archimède déjà plusieurs fois rappelé (²).

La quadrature des conchoïdes en général est également due à Roberval. Il arrive ainsi par exemple à celle du limaçon : soit la demi-circonférence OA (fig. 142) ; prolongeons les cordes OL, OK, OJ, OI,... d'une longueur constante LN, KM,... le lieu des points N, M,... est un limaçon. Menons K*m* = LN ; la surface élémentaire MKLN se compose 1° du triangle *m*KM, égal au secteur N'AM', élément du secteur AN'B, et 2° du trapèze NLK*m*, qui a pour me-

(¹) Que Lalouvère appelle *cyclocylindrica*, mais qu'on appelle aujourd'hui *vivianienne*, du nom du géomètre qui a appelé l'attention sur cette courbe.

(²) Tartaglia (op. cit.) a eu la première idée de la vivianienne, dans un problème qu'il définit ainsi : « designare in vna sola riuolutione di compasso vna figura ouale ». Les *Récr. Math.* de Leurechon (Pont-à-Mousson, 1624) contiennent aussi ce procédé de description d'un ovale sur un papier enroulé autour d'un cylindre.

sure LN.HL. Sommant les éléments semblables, entre les points L et A, il vient pour la surface NLAB, l'expression sect. N'AB + LN.Σ.HL. Or si les droites LN et KM sont très voisines, on a :

$$\Sigma.HL = \Sigma(AL - AK)^{(1)} = (AL - AK) + (AK - AJ) + (AJ - AI) + \ldots = AL^{(2)}$$

Enfin on citera, de Roberval, cette remarquable transformation

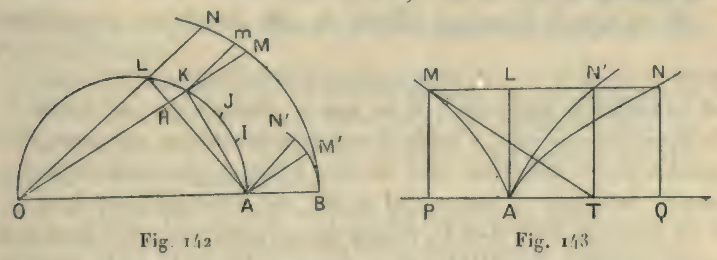


Fig. 142 Fig. 143

de courbe. Soit la tangente MT à la courbe AM (fig. 143) ; menons MN parallèle à la droite fixe AT et prenons LN = PT : le lieu de N est la transformée en question, et les deux courbes M et N sont liées par cette propriété que le segment MPA est égal à la surface LAN, chose aisée à démontrer si on mène une tangente M'T très voisine de la première.

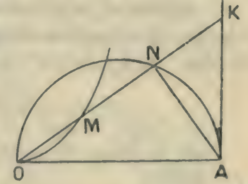


Fig. 144

La cissoïde a été quarrée par Huygens à peu près ainsi. Soit AK une tangente et ON une corde du cercle OA (fig. 144). Prenons OM = AK ; le lieu de M est une cissoïde. Or $OM^2 = OK^2 - ON^2 - 2.AN^2$, d'où pour le secteur OM, l'expression

$$\text{tri. mixt. NKA} - 2 \text{ seg. NA}.$$

(1) AH ne diffère de AK que d'un infiniment petit du deuxième ordre, puisque HK est perpendiculaire à AK.

(2) Roberval étend cette théorie à la conchoïde d'une courbe quelconque.

Descartes, Cavalieri et Roberval avaient compris que la quadrature d'une courbe en coordonnées cartésiennes se ramène à la recherche de la sommation des ordonnées, et avaient appliqué cette remarque à la quadrature des paraboles. Wallis (*op. cit.*) a étendu cette sommation aux courbes dont l'équation est de la forme $y = Ax^n + Bx^p + \dots$, n, p,... désignant des exposants entiers ou fractionnaires [1]. On lui doit aussi la quadrature de la spirale logarithmique.

Sluze, dans la deuxième édition de son *Mesolabum*, a quarré la *perle* $y^a = x^b(1 - x)^a$, en la mettant sous la forme $y = x^{\frac{b}{a}} - x^{\frac{b+a}{a}}$, et a ramené la quadrature de la spirale générale $\rho = \omega^n$ à celle de la parabole générale, à l'aide d'une transformation qui peut être rendue par ce théorème, que Newton a donné plus tard explicitement : *rabattons le vecteur* OM *en* OP, *sur l'axe polaire à l'aide de l'arc circulaire* MP, *et en* P, *élevons une perpendiculaire* PN *égale à ce même arc ; le secteur* OMA *correspondant au lieu de* M *est la moitié de celui du secteur* ONA.

(1) Fermat a, le premier, indiqué le moyen de quarrer les courbes définies par des équations implicites. Par exemple, pour le *huit* $y^2 = x^2 - x^4$, il pose $y = ux$ d'où $x^2 + u^2 = 1$, et il vient :

$$2\int ydx = 2\int uxdx = x^2u - \int x^2du = x^2u - \int(1 - u^2)\,du$$

Pour le *folium* $x^3 + y^3 = xy$, il écrit $y = ux^2$, d'où $u^3x^3 = u - 1$ et par suite

$$3\int ydx = \int 3ux^2dx = \int ud\,(x^3) = ux^3 - \int x^3du = ux^3 - \int \frac{u-1}{u^3}\,du$$

Pour l'*agnesienne* $y^2x + x = 1$, on fera $x = u^2$ et $y = \frac{v}{u}$, d'où

$$v^2 + u^2 = 1 \quad \text{et} \quad \int ydx = \int vdu.$$

La quadrature de cette courbe se ramène donc à celle du cercle $v^2 + u^2 = 1$, ce que Gregory avait démontré géométriquement, comme on le verra plus loin. Lalouvère paraît l'inventeur de cette courbe, que Fermat a quarrée à sa demande.

Gregory a traité spécialement de la transformation des courbes, dans sa *Geom. pars univ.* (Padoue, 1667), et dans ses *Ex. Geom.* (Londres, 1668). Il y a surtout à citer le théorème de Roberval qu'il a retrouvé, et un autre semblable, relatif à une transformée N′ (fig. 143) déterminée par la perpendiculaire N′T élevée au pied de la tangente et la parallèle MN′ à AP. Dans ce cas, la surface MAT est égale à la moitié du segment ANT. Une application très intéressante de cette transformation a lieu pour le cercle : on trouve ainsi l'agnesienne $y(1 + x^2) = 2$, dont la quadrature dépend ainsi de celle du cercle.

Barrow (op. cit.) a donné un grand nombre de transformations de ce genre avec les théorèmes concernant les relations entre les quadratures, les arcs, les tangentes, les centres de gravité, etc. des courbes et de leurs transformées.

C'est en 1692 que Viviani proposa dans les *Acta Eruditorum* de trouver une surface sphérique quarrable. Le théorème d'Archimède sur les projections cylindriques de telles surfaces donnait une solution immédiate, puisque la surface extérieure de l'onglet [1] est quarrable. Aussi Leibniz trouva-t-il aussitôt la solution même de Viviani, qui n'est autre que la surface retranchée de la sphère par un cylindre de rayon moitié moindre et qui lui est tangent intérieurement. La fig. 140 rend compte de tout cela.

Guido Grandi (op. cit.) a montré à décrire la *rosace* (rhodonea) produite en projetant, perpendiculairement à la base, sur la surface d'un cône droit, une circonférence tracée sur un rayon de cette base comme diamètre, la surface étant ensuite déroulée sur un plan. En général les formules de transformations sont $\rho' = k\rho$, $\omega' = k\omega$, d'où, dans le cas du cercle $\rho' = \sin\omega$, la rosace d'indice k, $\rho = k \sin k\omega$.

On doit à Jean Bernoulli (*Acta Erud.* 1695) cette remarque qu'*une aire conique quelconque se projette sur la base suivant une sur-*

(1) Leibniz l'appelle *scutus*, et la surface sphérique *carbasa*, que Viviani dénomme *vela quadrabile fiorentina*.

face qui est à l'aire projetante comme le rayon au côté du cône. De là la quadrature de la rosace, dont chaque feuille a une surface égale à la moitié de celle du secteur circonscrit [1].

Guido Grandi a appelé *clélie* (clœlia) la courbe sphérique qui se projette sur le plan de l'équateur suivant une rosace. La courbe de Pappus est une clélie d'indice $1/4$; celle de Viviani, une clélie d'indice 1. Les clélies déterminent sur la sphère de nouvelles surfaces quarrables.

Dans son *Treat. of Flux.* Mac Laurin traite de plusieurs quadratures géométriques, dont les suivantes, soit la perpendiculaire KB à OA équidistante des points O et A (fig. 145) ; sur OK, prenons le

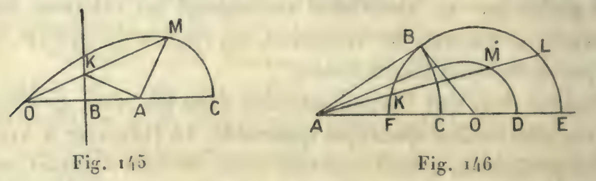


Fig. 145 Fig. 146

point M tel que MA = AK ; le lieu de M est une *trisectrice.* L'angle MAC est toujours triple de l'angle MOC, et par suite il en est de même des éléments du secteur AMC et du triangle OKB.

Le folium n'étant autre que la courbe résultant des réductions des ordonnées de la trisectrice, dans la proportion de $\sqrt{3}$ à 1, la quadrature de cette courbe est aisée à déduire de celle de la trisectrice.

Si AB (fig. 146) est une tangente à la circonférence O faisant un

[1] La droite $\rho \sin \omega = 1$ se transforme en la courbe $k\rho \sin k\omega = 1$, dont la quadrature se ramène par suite à celle d'une figure rectiligne. On pourrait tirer de là diverses manières de trisecter un angle à l'aide d'un cône.

La rosace est en même temps un limaçon, une podaire d'épicycloïde et une épitrochoïde. C'est également le lieu des intersections de deux circonférences tournant uniformément autour d'un point fixe qui leur est commun, et le lieu de l'articulation d'un compas dont les deux pointes se meuvent uniformément sur une même circonférence.

Elle se construit par points de différentes manières.

angle de 45° avec le diamètre AO, et que sur une transversale quelconque AL, on prenne, avec Mac Laurin, AM = KL, le lieu de M sera une *lemniscate*. On a ainsi : $OM^2 = OL^2 + OK^2 - 2.OB$, ce qui, en considérant les secteurs élémentaires, conduit à écrire pour la surface AMD

$$\text{sect. BLD} + \text{sect. AKF} - 2 \text{ sect. ABO}.$$

Depuis on a donné bien des quadratures dans ce genre, mais ce qui précède paraît suffisant pour la connaissance du sujet, dont les éléments seuls ont du reste été envisagés ici. Il suffira de signaler pour conclure, les formules de quadrature approchée de Th. Simpson, de Poncelet, de Parmentier et autres.

Rectification géométrique de quelques courbes. — Le problème de la rectification des courbes a dû se poser peu de temps après celui de leur quadrature. Après avoir comparé les surfaces des figures rectilignes, l'idée sera venue de leur comparer celles des figures curvilignes, et ensuite de comparer les arcs à des droites ayant avec les paramètres de la courbe des relations simples. Archimède parvint à donner de la circonférence, deux limites qu'on pouvait par sa méthode, resserrer autant qu'on voulait. Peut-être que s'il avait voulu s'affranchir entièrement de la crainte de voir discuter ses découvertes [1], lui que son génie devait préserver de l'erreur, il eût mené à terme bien des théories dont il ne nous a laissé que le principe, abandonnant aux modernes toute la gloire de leur invention. De ce nombre est la rectification des courbes.

La première mention qui en est faite est celle de la *loxodromie* [2],

[1] Il paraît bien prouvé maintenant qu'il a trouvé ses théorèmes par des méthodes simples analogues aux méthodes modernes, et qu'il les a ensuite exposées sous la forme inattaquable, mais combien prolixe, qu'ont adoptée les Anciens.

[2] On sait que c'est une courbe sphérique coupant tous les méridiens sous le même angle : c'était la courbe théorique de la navigation à voile, comme l'arc de grand cercle, celle de la navigation à vapeur.

que Snellius a virtuellement rectifiée (*Tiphys batavus*, Leyde, 1624). Voici au reste son théorème : « *Loxodromia est instar basis trianguli plani rectanguli ad sphœræ superficiem applicati, cujus crus unum sit distancia parallelorum inter quos intercipitur.* » Il le démontre au moyen de la considération du triangle formé de l'arc reliant deux points *vicinissima*, de l'accroissement du méridien et de celui du parallèle correspondant.

Comme on le voit dans l'ouvrage cité de Mersenne, Roberval avait découvert, dès 1644, la relation existant entre les arcs de la parabole et ceux de la spirale [1], relation qu'il avait déduite de sa doctrine des mouvements composés. Ce théorème a été vérifié par Pascal, en 1659, par la méthode des Anciens.

Wrenn a trouvé la rectification de la cycloïde, en 1658 ; Pascal a étendu cette découverte aux cycloïdes allongées et accourcies, qui se rectifient par des arcs d'ellipse, et a fait voir qu'à toute cycloïde allongée correspond une cycloïde accourcie ayant ses arcs égaux à ceux de la première : c'est là le premier germe de la théorie des fonctions elliptiques.

Dans une lettre à Mersenne de 1668, mais publiée seulement en 1668, Descartes fait mention de la spirale logarithmique [2], dont il donne la rectification, sans paraître s'en douter, de même que Snellius, tellement était enraciné ce préjugé qu'aucune courbe ne pouvait être mesurée par une droite. Ces propriétés de la spirale logarithmique ont été retrouvées par Wallis et publiées dans son *De Cycloide*. Il était du reste facile de passer de la découverte de Snellius à celles de Descartes et de Wallis : les figures sont les mêmes dans les deux cas.

[1] Cavalieri avait déjà remarqué que la spirale n'est qu'une parabole contournée suivant une loi simple, mais il n'avait en vue que la comparaison des surfaces des deux courbes.

[2] Il la définit comme s'inclinant également sur une circonférence, ou, plus exactement, comme coupant tous ses rayons vecteurs sous un angle constant.

Ce dernier savant, dans son *Arith. inf.* avait montré que le problème de la rectification revient à sommer les hypoténuses des triangles rectangles formés des accroissements de l'abscisse et de l'ordonnée. On était ainsi ramené à une intégration portant sur un radical ; celles des polynomes entiers commençaient à devenir familières, mais c'était là un cas tout nouveau. Neil s'aperçut que dans la *semi-cubique*, $y^2 = x^3$, l'hypoténuse du triangle élémentaire s'exprime rationnellement, ce qui lui donna la rectification de cette courbe [1]. A peu près en même temps, Van Heuraet arriva au même résultat par la voie géométrique suivante : menons en M à la courbe AM, la normale ML (fig. 147) et portons sur l'ordonnée du point M, la longueur $\mathrm{PN} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MP}}$: la quadrature du lieu de N sera représentée par le même nombre que l'arc correspondant de la courbe AM. Van Heuraet déduit de là cette conséquence que si k est pair, la courbe $y^k = x^{k+1}$ est absolument rectifiable [2].

[1] On a aujourd'hui une foule d'exemples d'une telle réduction. La recherche de courbes rectifiables fournit une intéressante application de la théorie élémentaire des nombres. Ainsi si F, f et φ désignent trois fonctions de u, la courbe $x = \int (f - \varphi)\,\mathrm{F}du$, $y = \int \mathrm{F}f\varphi du$ se rectifie par la formule $s = \int (f + \varphi)\,\mathrm{F}du$. On peut ainsi obtenir une foule de courbes rectifiables, en faisant par exemple $\mathrm{F} = f = u$, $\varphi = 1$; $\mathrm{F} = au^m$, $f = bu^n$, $\varphi = cu^p$, m, n, p entiers ou fractionnaires ; $\mathrm{F} = 1$, $\varphi = \frac{1}{4f}$.

Ou bien, avec Schlömilch, $x = \int (\mathrm{F} + \sqrt{2\mathrm{F}f})\,du$, $y = \int (f + \sqrt{2\mathrm{F}f})\,du$, ce qui donne $s = \int (\mathrm{F} + f + \sqrt{2\mathrm{F}f})\,du$. On peut faire par exemple $f = 2au$, $\mathrm{F} = bu^3$; $f = 2a$, $\mathrm{F} = bu^2$; $f = 2a$, $\mathrm{F} = bu^4$; $f = 2au^2$, $\varphi = bu^4$.

[2] C'est ainsi que Jean Bernoulli a ramené, en 1698, la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole, et montré à déterminer deux arcs paraboliques dont la différence soit rectifiable. Cette recherche a été étendue aux coniques à centre par Fagnano, qui a trouvé en outre qu'on peut diviser également un arc de lemniscate par une construction géométrique élémentaire. Landen a plus tard ramené la rectification de l'arc hyperbolique à celle de deux arcs elliptiques. On connaît aujourd'hui les solutions d'un grand nombre de problèmes de ce genre.

Fermat avait aussi, vers la même époque, fait la même découverte.

Dans son opuscule déjà cité *Geom. pars univ.* Gregory a donné, sur ce sujet, un théorème remarquable par ses nombreuses conséquences et qui devrait être classique. *Soient les deux courbes* AM,

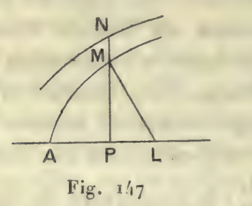


Fig. 147

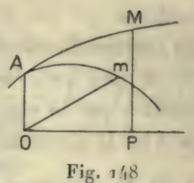


Fig. 148

A*m* (fig. 148), *la droite* OP, *l'ordonnée à l'origine* OA*; si, pour deux arcs quelconques* AM, A*m*, *l'ordonnée* MP *est égale au vecteur* O*m*, *la surface* OAMP *est double du secteur* OA*m* *et les tangentes en* M *et m font des angles égaux avec les droites* MP, O*m*. La première courbe est l'*involuta* de la seconde, laquelle est l'*evoluta* de la première ; la droite OP est la *base d'involution* et le pôle O, le *centre d'évolution*(1).

On tire de là ces importantes conséquences : *la cycloïdale* (2) *et la podaire* (3) *d'une même courbe ont entre elles la relation d'involuta à evoluta*, d'où une démonstration de ce théorème de Steiner : *les arcs correspondants de la cycloïdale et de la podaire d'une même courbe sont égaux et la surface correspondant à la première est double de celle qui correspond à la deuxième* (*J. de Crelle*, 1846).

Une courbe roule sur son involuta ; selon que le roulement a lieu à l'intérieur ou à l'extérieur, le pôle a pour trajectoire la base d'involution ou une anticaustique (4) *de l'involuta, les rayons étant perpendicu-*

(1) Analytiquement les relations de ces deux courbes sont $y = \rho$, $x = \int \rho d\omega$. Voir *J. de Math. sp.* 1893, p. 133 et 1896, p. 249.

(2) C'est la trajectoire d'un point donné d'une courbe roulant sur une droite.

(3) C'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les tangentes à une courbe.

(4) Podaire homothétique double.

laires à la base. Le premier de ces théorèmes est dû à Habich (*Mathesis*, 1882).

Une courbe roule sur son evoluta ; suivant que le roulement a lieu à l'intérieur ou à l'extérieur, la base enveloppe le pôle ou l'épicycloïdale[1] *de l'évoluta*.

L'involuta d'une circonférence $\rho = \cos\omega$ *est une circonférence de rayon double* $x^2 + y^2 = 1$. On en conclut que *quand une circonférence roule à l'intérieur d'une circonférence de rayon double, la cycloïdale d'un point quelconque de la première est un diamètre de la seconde* (Théorème de Cardan) et que *si une circonférence roule sur une circonférence de rayon moitié moindre, un diamètre quelconque enveloppe un point fixe ou une cardioïde, selon que le roulement est intérieur ou extérieur*. Plus généralement, *si une circonférence roule sur une droite ou sur une autre circonférence, une corde quelconque enveloppe une développante de cycloïde ou d'épicycloïde* (Chasles) ; d'où il suit que *si deux points* K, L, *se meuvent uniformément sur une circonférence, l'enveloppe de* KL *est une développante d'épicycloïde*.

L'involuta de la rosace $\rho = \sin k\omega$ *est l'ellipse* $y^2 + k^2x^2 = 1$. La rectification de la rosace se ramène donc à celle de l'ellipse [2].

L'involuta du limaçon $\rho = a\cos\omega + b$ *est la cycloïde allongée ou accourcie*

$$y = a\cos\omega + b, \qquad x = a\sin\omega + b\omega,$$

(1) Trajectoire d'un point du plan d'une courbe roulant symétriquement sur une courbe égale.

(2) Cela se démontre aussi en remarquant que la surface du cylindre projetant, sur la surface d'un cône de hauteur h, le cercle $\rho = \cos\omega$, se développe sur un plan suivant la sinusoïde $x = h\cos y$. Or les arcs de cette dernière courbe se rectifient par des arcs d'ellipse.

Si, au lieu d'une circonférence, on projette une droite sur la surface du cône, la section est plane, et c'est comme on sait, une hyperbole. Or, d'un autre côté, la surface conique développée donne la courbe $\rho\sin k\omega = 1$, inverse de rosace : les arcs de cette courbe se rectifient donc par des arcs d'hyperbole.

On voit comment à l'aide du cône, on pourrait transformer des courbes rectifiables en d'autres courbes également rectifiables.

ce qui découle immédiatement de la propriété du limaçon d'être la podaire du cercle. D'après le théorème de Pascal cité plus haut, *le limaçon se rectifie par des arcs d'ellipse et à chaque limaçon à boucle correspond un limaçon à inflexion dont les arcs sont égaux aux siens.* En particulier *les arcs correspondants de la cycloïde et de la cardioïde sont égaux.*

La podaire du foyer d'une parabole est une droite, donc *l'evoluta de la cycloïdale du foyer de la parabole* (laquelle est une *chaînette*) *est une droite.* Cette courbe est donc absolument quarrable et rectifiable.

La cycloïdale du foyer d'une conique (laquelle est une *élastique*) est rectifiable à l'aide des arcs de cercle, puisque sa podaire est un cercle.

La podaire du pôle de l'*orthogénide* $\rho^k = \sin k\omega$ [2] est l'orthogénide $\rho^{\frac{k}{k+1}} = \sin \frac{k}{k+1}\omega$. Il s'ensuit que les arcs de la deuxième sont égaux à ceux de la cycloïdale de la première (Mac Laurin).

Si l est différent de -1, la courbe $\rho = \sin k\omega \cos^l k\omega$ *a pour involuta la courbe*

$$y^2 = \left[(l+1)kx\right]^{\frac{2l}{l+1}} - (l+1)^2k^2x^2$$

L'involuta de la spirale $\rho^k = \omega$ *est la parabole* $ky^{k+1} = (k+1)x$. De là, la généralisation du théorème de Roberval donné plus haut, théorème qu'on peut aussi déduire de ce que *la cycloïdale d'une développante de cercle est une parabole* et que *sa podaire est une spirale.* Par exemple si k est un nombre pair, la spirale $\rho = \omega^k$ est absolument rectifiable.

(2) Cette équation représente un grand nombre de courbes connues : la circonférence ($k = 1$), la droite ($k = -1$), la lemniscate ($k = 2$), l'hyperbole équilatère ($k = -2$), la cardioïde $\left(k = \frac{1}{2}\right)$, la parabole $\left(k = -\frac{1}{2}\right)$.

L'involuta de la spirale hyperbolique $\rho\omega = 1$ *est une logarithmique* $x + Ly = 0$ (Nicolas, *De spiralibus hyperbolicis et lineis logarithmicis*, Toulouse, 1696).

L'involuta de la spirale logarithmique est une droite, ce qui explique les nombreuses propriétés de cette courbe.

Huygens, dans son célèbre *Horologium oscillatorium* (Paris, 1673) a donné la théorie des développées, trop connue pour qu'il en soit parlé ici. On mentionnera seulement aussi la rectification de l'épicycloïde, par Newton (*Princ.*)

La vivianienne est une courbe sphérico-cylindrique et on sait qu'en développant sur un plan la surface cylindrique qui la contient, cette courbe devient identique à la développée de l'ellipse limitant l'onglet de G. de St-Vincent ou scutus. La vivianienne se rectifie donc par des arcs d'ellipse. Elle jouit d'ailleurs de nombreuses propriétés qui peuvent lui servir de définition [1].

Jean Bernoulli a donné, dans les *Acta erud.* de 1705, deux théorèmes très remarquables permettant de trouver des courbes ayant des arcs de longueurs égales à ceux de courbes données. Voici le premier : *une courbe* (perreptans) *se meut parallèlement à elle-même, en restant toujours tangente à une courbe fixe* (perreptanda). *Tout*

[1] *C'est le lieu d'un point mobile sur la sphère et dont les accroissements sont égaux en longitude et en latitude* (Jean Bernoulli). *C'est la projection stéréographique de la lemniscate* (d'Arrest), l'*antiprojection* de la besace, l'*antistéréographique* de la strophoïde et l'*antignomonique* du cappa.

Considérons sur la base d'un cylindre de diamètre 1, deux points diamétralement opposés S, O, et construisons : 1° un cône à 45° ayant S pour sommet et pour axe la génératrice SS' du cylindre ; 2° une sphère de rayon 1 et de centre O ; 3° deux cylindres paraboliques dont les bases aient 1 comme paramètre, OS comme axe avec O et S comme sommets : les cinq solides se coupent suivant une même vivianienne.

On peut ajouter ici que, par analogie avec le problème de Viviani, Offenbourg a proposé en 1718, dans les *Acta Erud.* de déterminer des courbes sphériques rectifiables. Ce problème a été résolu par Hermann au moyen de l'*épicycloïde sphérique*.

point de la courbe mobile décrit une troisième courbe (reptoria) *dont les arcs sont égaux à la somme ou à la différence de ceux des premières.* Il a appliqué cette théorie à l'ellipse et en a tiré ce procédé graphique pour approcher indéfiniment de la longueur de la demi-ellipse dont les demi-axes sont a et b : *décrire un demi-cercle ayant pour diamètre la droite* AOL *telle que* $AO = a$ *et* $OL = b$; *si on divise cette demi-circonférence en n parties égales aux points* F, G, H, ...K, L ; *la longueur cherchée est la limite de la circonférence de rayon*

$$\frac{OA + OF + OG + \dots + OK + OL}{n}$$

à mesure que n tend vers l'infini (1).

Voici maintenant le second théorème : *Etant donné plusieurs courbes, on en déduira une autre dont les abscisses et les ordonnées soient égales aux sommes algébriques semblables des abscisses et des ordonnées correspondant aux extrémités des arcs des premières et de même amplitude* (limités en des points dont les normales font des angles égaux avec celles des origines (2)). *Les arcs de la courbe ainsi produite sont de même égaux à la somme algébrique des arcs de la courbe proposée.*

Les applications de la géométrie infinitésimale ont encore fourni d'autres théorèmes, mais ils sont en général assez compliqués. Il sera seulement question à présent de quelques méthodes d'approximation proposées pour la rectification des courbes ; et d'abord voici celle d'Euler (*Novi Comm. Petr.* 1751). Soient AO et BO les normales aux extrémités d'un arc AB ne présentant aucune inflexion ; le développement de l'arc est compris entre

$$(AO + BO)\ \mathrm{tg}\,\frac{AOB}{2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2(AO^2 + BO^2)}\ \sin\frac{AOB}{2}.$$

(1) Ce théorème a été démontré autrement par Prouhet en 1865, dans les *Nouv. Ann.*

(2) On peut définir ces arcs correspondants comme ayant une tangente commune à l'origine, et des tangentes parallèles à leurs extrémités.

Si AOB est assez petit, l'arc est sensiblement égal à l'arc circulaire de même amplitude et dont le rayon est égal à $\frac{AO + BO}{2}$. De là, en menant diverses normales écartées successivement d'un même angle ω, un procédé assez pratique, qu'il réduit d'ailleurs en formule et qu'il applique à diverses courbes.

On peut aussi utiliser de la même manière une remarque faite par Lambert : c'est qu'un arc sans inflexion est très approximativement égal au tiers de la somme de la corde et des tangentes aux extrémités. C'est une extension du théorème d'Huygens.

Cauchy (*Rés. anal.* Turin, 1835) a fait voir qu'en projetant sur les n rayons d'une *rose des vents*, un contour convexe quelconque appelant a la moyenne des projections obtenues, le développement de la courbe a pour mesure $\frac{\pi a}{2}$, avec une erreur inférieure à $\frac{\pi a}{2n^2}$. Il arrive à cet intéressant résultat en opérant d'abord sur une droite, puis sur un polygone convexe.

Le développement de l'ellipse se trouve exactement par l'emploi de séries d'un calcul très pénible. Aussi le plus souvent, on se contente de formules approchées. En voici trois très simples

$$2\pi\left(\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{(Muir).}$$

$$4\,\frac{(a - b)^2 + \pi ab}{a + b} \qquad \text{(Camus).}$$

$$\sqrt{a^2 + 9b^2} + \sqrt{9a^2 + b^2} \qquad \text{(Hofbauer).}$$

On en trouve une moins élégante mais plus pratique en déterminant les coefficients A, B, C, de manière que l'expression

$$Aa + B\,\frac{ab}{a + b} + Cb$$

prenne les valeurs

$6{,}2831853a$, $\qquad 4{,}8442099a$, $\qquad 4a$,

quand on y fait $b = a$, $b = \frac{a}{2}$, $b = 0$. On trouve ainsi la formule remarquablement exacte

$$4a - 3{,}5686 \frac{ab}{a+b} + 4{,}0675b$$

On a souvent à mesurer un arc circulaire dont on connaît la corde $2c$ et la flèche f. On peut voir sur ce sujet dans le *J. de Math. sp.* de 1893, p. 184, plusieurs formules très approchées, dont la suivante, due à Newton

$$\frac{2c}{3} \frac{15c^2 + 13f^2}{5c^2 + f^2} \text{ [1]}$$

On tire de là ce moyen de mesurer un angle AOB sans goniomètre : prendre un même nombre de pas, cent par exemple, sur AO et OB, mesurer AB au pas ainsi que la médiane OC ; on aura en minutes

$$AOB = 1\,146 \frac{14.OA + OC}{3.OA + 2.OC} \frac{AB}{OA}$$

Pour l'angle de 45°, on trouve 2 699',88, au lieu de 2 700' : la formule peut ainsi servir dans tous les cas.

[1] On peut démontrer cette formule en partant du résultat auquel conduit le calcul suivant. Posons $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, ce qui donnera

$$x = 2\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \ldots\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1+z^2}{2z} \sin x = 1$$

d'où en multipliant ces deux dernières égalités

$$x = \frac{\sin x}{2}\left(1 + \frac{2z^2}{1.3} - \frac{2z^4}{3.5} + \frac{2z^6}{5.7} - \ldots\right)$$

ce qui donne approximativement

$$x = \frac{\sin x}{6} \frac{14 + \cos x}{3 + 2\cos x}.$$

Dans l'article cité tout à l'heure, est signalé un paradoxe qu'il peut être utile de rappeler ici, car il montre, une fois de plus, à combien de difficultés conduisent souvent les considérations les plus élémentaires, dès que l'infini est en jeu : ce n'est que tout à fait accidentellement que ce mystérieux Protée se laisse réduire au rôle d'auxiliaire, dans la recherche des vérités mathématiques.

Soit le triangle isocèle AOB ; sur les milieux C′, C′ de AO et de BO, on élève des perpendiculaires C′O′, C′O′, égales chacune au quart de la hauteur OC du triangle ; sur les milieux C″, C″, C″, C″, de AC′, C′C, CC′, C′B, on élève de nouvelles perpendiculaires extérieures égales chacune au quart de C′O′ ; et ainsi de suite. Les lignes brisées AOB, AO′OO′B, AO″O′O″OO″O′O″B,... tendent certainement vers une certaine limite qu'il semble bien difficile de prendre pour une courbe continue, à cause de la discontinuité inévitable des opérations qui la définissent : elle est probablement une *courbe pointillée* (1). Et cependant cette limite a un développement défini et

(1) Euler a eu la première idée des courbes de ce genre : dans son *Intr. in anal. inf.* il remarque que les courbes $y = (-1)^x$ et $y(-x)^x = 1$ sont formées de points discontigus correspondant aux valeurs paires de x. Vincent (*Ann. de G.* t. XV) a examiné plusieurs cas semblables : la courbe $y = a^x$ a deux branches symétriques : une continue et une pointillée ; la

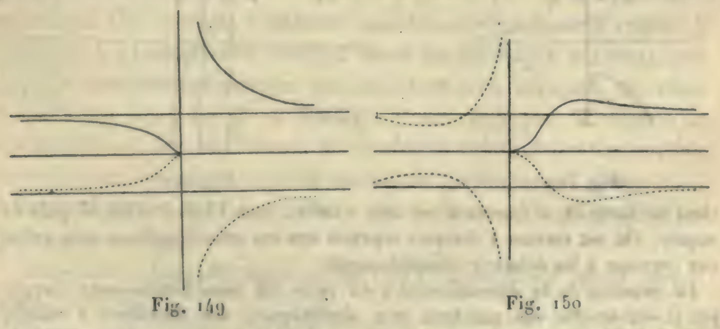


Fig. 149 Fig. 150

courbe $y = (-a)^x$, deux branches pointillées en quinconce ; la chaînette, $2y = e^x + e^{-x}$, quatre branches dont une seule continue ; la courbe $y = \sqrt[x]{a}$, quatre branches dont deux pointillées, l'une de celles-ci se raccor-

même très facile à déterminer ; car, en appelant c et f les longueurs AO et CO, le côté c_n de la n^e ligne brisée est donné par la relation

$$c_n^2 = \frac{c^2}{4^{n-1}} + \frac{f^2}{4^{n-1}} + \dots + \frac{f^2}{4^{2n-2}} = \frac{1}{4^{n-1}}\left[c^2 + \frac{4}{3}f^2\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right]$$

d'où, pour le développement de cette même ligne,

$$2\sqrt{c^2 + \frac{4}{3}f^2\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}$$

et, à la limite, pour $n = \infty$,

$$2\sqrt{c^2 + \frac{4}{3}f^2}.$$

dant au point d'arrêt de sa symétrique, ce qui tendrait à prouver que les courbes n'ont pas de tels points (fig. 149) ; la courbe $y = \sqrt[x]{x}$, quatre branches dont une seule continue (fig. 150) ; de même pour la courbe $y = x^x$ (fig. 151) ; remarque analogue pour la courbe $y\text{L}x = x$ (fig. 152).

Dans le même volume, Steiner a montré que la difficulté provient d'un

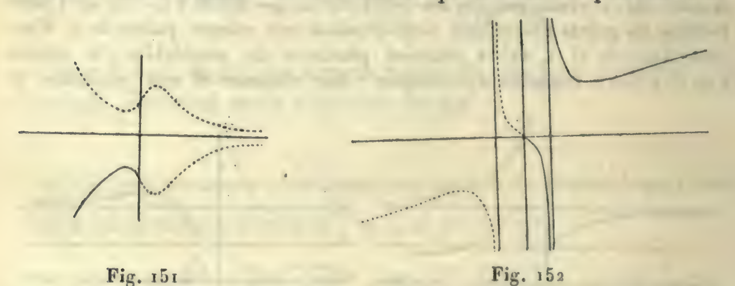


Fig. 151 Fig. 152

abus de mots et disparaît si on fait x infini, car l'infini n'est ni pair ni impair. On est revenu à diverses reprises sur ces considérations, sans qu'on soit parvenu à les éclaircir complètement.

La question de la discontinuité a du reste été considérablement élargie par la découverte des nombres non algébriques, des fonctions à valeurs saltantes ou oscillantes, des ensembles, etc. On peut voir à ce sujet, par exemple, du Bois-Reymond, *Th. g. des f.* (traduction française, Paris, 1887), Fouët, *Leçons el. sur la th. des f. anal.* (Paris, 1902), etc.

On peut aisément s'assurer que la flèche d'un arc circulaire est très sensiblement égale au quart de celle d'un arc double : la formule précédente peut donc être employée pour le calcul d'un arc circulaire déterminé par sa corde et sa flèche.

Tchebichef a trouvé cette formule pour la rectification d'un arc de courbe quelconque (A. F. 1882).

Sur la géométrie des courbes et ses applications. — Depuis l'essor prodigieux qu'a pris l'analyse dans le dernier siècle, on ne considère plus guère que les courbes définies par des équations finies ou différentielles. Il semble cependant que la géométrie analytique ne devrait intervenir que comme auxiliaire pour l'étude de certaines courbes, et que, — à part celles qui sont destinées à faire saisir plus aisément les singularités analytiques, — l'intérêt d'une courbe réside surtout dans ses propriétés géométriques, les seules du reste qui servent dans les applications. Il y aurait donc lieu d'exposer, dans un but de vulgarisation, les plus saillantes de ces propriétés, qu'on a découvertes en général par l'analyse, mais qu'on peut pour la plupart vérifier par la géométrie la plus élémentaire. Telle est l'idée qui a donné naissance au court essai qui va suivre, où on se borne aux choses les plus simples et les plus élémentaires. On trouvera d'ailleurs tous les renseignements relatifs à l'étude et à l'histoire des courbes dans les ouvrages suivants, par lesquels leurs savants auteurs ont déféré au vœu exprimé, en 1892 et 1895, par l'Ac. des sc. de Madrid, et en 1894, par M. Haton de la Goupillière, de voir dresser un catalogue méthodique des courbes connues avec des monographies succinctes de chacune d'elles :

Brocard, *Notes de bibliogr. des c. géom.* deux vol. autog. (Bar-le-Duc, 1897 et 1899).

Gino-Loria, *Spezielle algebraische und transcendente ebene curven* Leipzig, (1902).

Gomes Teixeira, *Tratado de las curvas especiales notables* (Madrid, 1905), et l'édition francaise de la première partie de cet important travail (Coïmbre, 1908).

La *droite*, d'après Platon, est la ligne dont un point quelconque cache tous les autres. Cette propriété est utilisée dans le jalonnement des alignements, dans la vérification des parties rectilignes ou planes des constructions, des meubles, des machines. C'est aussi la ligne qui reste identique à elle-même quand on la fait tourner autour de deux de ses points, propriété qui la fait employer comme axe de machines, axe de symétrie dans les dessins, axes de coordonnées dans les représentations graphiques des faits analytiques ou empiriques ; c'est également par elle qu'on vérifie la rectitude d'une règle. La droite partage, avec la circonférence et l'hélice, la propriété de pouvoir se mouvoir sur elle-même, ce qui la fait employer pour l'exécution des forets, des pistons, directrices ou glissières de machines, etc. Enfin, d'après une remarque faite pour la première fois explicitement par Archimède, c'est le plus court chemin d'un point à un autre (1), ce qui sert aux charpentiers pour tracer des droites au moyen d'une ficelle noircie, et a donné l'idée du mesurage de la distance de deux points par la comparaison de la partie de droite qui les sépare avec celle de deux points pris une fois pour toutes.

La trajectoire de la lumière dans le vide est une droite, autant qu'ont permis de le constater les instruments et la petitesse relative des bases trigonométriques terrestres employées.

Les combinaisons de droites fixes font l'objet de la géométrie élémentaire, celles de droites mobiles sont du domaine de la géométrie cinématique.

La *circonférence* est utilisée partout dans l'industrie, les arts mécaniques et l'ornementation. Les premiers hommes ont tiré parti

(1) Proclus raconte à ce sujet qu'on taxait l'énoncé de cet axiome d'inutile, les ânes eux-mêmes en ayant conscience. Il est à peine besoin de signaler l'inexactitude de cette remarque : si la lumière suivait une trajectoire courbe, les animaux et les hommes mêmes se dirigeraient suivant cette courbe pour atteindre leur but.

de l'équidistance des tangentes parallèles de cette courbe, pour transporter leurs lourds fardeaux au moyen de rouleaux, un des premiers engins humains. L'égalité des vecteurs de cette ligne et sa propriété de pouvoir se recouvrir elle-même la font employer dans une foule d'appareils inutiles à rappeler ici. Elle est utilisée aussi en architecture, dans le raccordement des voies de communication, dans la cartographie, les tracés géométriques, descriptifs, cinématiques, etc.

La circonférence, cas particulier de l'ellipse, du limaçon, de l'épicycloïde, de la spirale, de l'hélice, de la loxodromie, participe d'une partie des propriétés de ces courbes.

On sait que Kepler a découvert que les orbites des planètes sont dans leur ensemble, des *ellipses*. Cette courbe est employée pour certaines voûtes et pour obtenir des engrenages à axes équidistants, mais de mouvements angulaires variables. Sa propriété d'être la projection du cercle la fait utiliser dans les épures, les cartes géographiques, la géodésie, etc. On connaît les réflexions acoustiques produites dans une voûte ellipsoïdale, la question du billard elliptique, etc.

Certaines comètes paraissent suivre des trajectoires *paraboliques*. C'est aussi la courbe des projectiles, quand on fait abstraction de la résistance de l'air ; l'*enveloppe* des diverses paraboles produites par un même engin tirant sous une inclinaison variable en est une autre qui s'appelle la *parabole de sûreté* (Jacques Bernoulli). Les ponts suspendus affectent cette forme, de même que tout fil attaché à deux points de niveau et chargé également suivant l'horizontale. C'est le profil du solide d'égale résistance. Les réflecteurs, les porte-voix utilisent les propriétés réfléchissantes de la parabole. La surface d'un liquide enfermé dans un vase cylindrique tournant autour de son axe est un paraboloïde ; on a tiré parti de cette propriété pour obtenir avec du mercure des miroirs astronomiques dont la qualité principale est l'économie.

Ménechme avait trouvé que la question de la recherche de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre a et b se ramène à celle de l'intersection des deux paraboles $y^2 = ax$, $x^2 = by$, ou de la parabole $x^2 = by$ et de l'hyperbole $xy = a^2$. Descartes a fait voir qu'avec la parabole et le cercle, on peut résoudre toute équation cubique, entre autre celle d'où dépend la trisection de l'angle; cette théorie a été étendue à une conique quelconque par Sluze [1].

L'hyperbole est une vraie table graphique de multiplication et de division, à cause de la constance du produit de ses coordonnées; c'est même une table de logarithmes, les aires hyperboliques étant proportionnelles aux logarithmes des abscisses de l'asymptote. C'est la courbe théorique des cheminées d'appartements, à cause de sa propriété de diverger les rayons focaux (Bergery). C'est aussi la courbe que décrit un réverbère M glissant le long d'une corde AMB attachée en A, et glissant sur une poulie fixe B (A. Comte). A l'arrière d'un bateau trapézoïdal qui se balance, la ligne limitant la partie mouillée est une hyperbole dont les asymptotes sont les côtés du trapèze.

C'est à l'aide de l'hyperbole que les Anciens résolvaient le problème de l'insertion d'une droite dans un angle donné et passant par un point donné, ainsi que ceux de la trisection de l'angle et de la duplication du cube. La même courbe sert dans la gnomonique, ainsi qu'à la solution du *problème d'Al-Hazen* : trouver sur une

[1] On peut tracer la parabole $x^2 = y$ sur un papier calque et une série d'hyperboles équilatères de forme $xy = a$ sur un carton, ce qui permet de résoudre l'équation $x^3 + cx^2 + bx = a$, en plaçant convenablement le calque (voir Reuschle, *Appareil grapho-mécanique*, (Stutgard, 1877). Bérard avait déjà décrit (*Opuscules*, Nismes, 1810) un appareil, qu'il appelle *balance algébrique* et contenant matérialisées les paraboles $x = \pm y$, $x^2 = \pm y$, $x^3 = \pm y$,... sur lesquelles roulent des poids proportionnels aux coefficients des équations à résoudre (voir *J. de Math. sp.* 1895, p. 228). Lalanne avait montré à résoudre les équations cubiques en considérant les tangentes à la semi-cubique, idée reprise et considérablement étendue par M. d'Ocagne.

sphère le point où un rayon, partant d'un point donné, se réfléchit, pour aboutir ensuite en un second point donné.

Le problème de tracer une allée dont les deux côtés paraissent parallèles a été agité longtemps : l'hyperbole a été proposée dans ce but, ainsi que la courbe $yLx = x$ et d'autres encore. Malgré certaines objections d'ordre physiologique, il semble bien que la solution doit simplement employer deux droites divergentes.

Combinant la *parabole cubique* $x^3 = y$ avec la droite (Wallis), avec le cercle (Bérard), avec la parabole (St-Loup), on aura la solution graphique des équations des troisième, quatrième et sixième degrés. En la combinant avec la courbe $y^3 = 1 - x$, qui lui est identique, on a la solution de $x^9 - x = 1$ (l'Hospital) : cette idée pourrait être utilisée ailleurs.

Les arcs de cercle des voies ferrées sont raccordés aux alignements droits par des paraboles cubiques permettant de passer progressivement de la courbure constante de l'arc circulaire à la courbure nulle de la droite : on sait que l'effet de la force centrifuge, — laquelle est inversement proportionnelle au rayon de courbure, — doit être combattue par l'établissement d'un *dévers* transversal des rails, qui diminue ainsi peu à peu jusqu'à s'annuler à l'arrivée sur la partie droite.

La *semi-cubique* $y^3 = x^2$, est la *courbe isochrone*, c'est-à-dire celle d'un poids descendant également dans des temps égaux (Leibniz). C'est aussi, comme on l'a vu, la développée de la parabole, d'où sa rectification par Huygens. Enfin elle est la *trajectoire orthogonale* (1)

(1) On appelle ainsi une courbe coupant sous des angles droits toutes les courbes d'un même *famille*. Ainsi pour des cercles concentriques, c'est une droite ; pour une droite tournant autour d'un de ses points, une circonférence ; pour les circonférences tangentes en un même point d'une droite donnée ou passant par deux points donnés, une circonférence ; pour une circonférence ou une parabole se mouvant en gardant le même axe, une logarithmique ; pour les paraboles de même sommet et de même axe, une

des positions successives d'une parabole se mouvant perpendiculairement à son axe.

La *cissoïde*, imaginée pour résoudre la duplication du cube, a été utilisée par Newton pour la solution de l'équation cubique, à cause de la facilité de sa description. Il y a aussi employé la conchoïde de la droite et celle du cercle (limaçon).

Torricelli avait posé la question de la forme que doit présenter un vase qui, percé d'un trou au fond, laisse s'écouler uniformément le liquide qu'il contient. Mariotte a montré que ce vase doit être en forme de paraboloïde du quatrième degré.

Le *limaçon* $\rho = \cos\omega + a$ est à la fois une conchoïde et une podaire du cercle, une *isoptique* (1) de deux cercles, une épicycloïde, une inverse focale de conique à centre et un cas particulier de la *cassinienne*. L'Hospital a trouvé que c'est la courbe que doit suivre un poids équilibrant un pont-levis. A signaler les deux cas particuliers de la *cardioïde* ($a = 1$), inverse focale de la parabole et le seul limaçon rectifiable; et de la *sesquisectrice* $\left(a = \frac{1}{2}\right)$, inverse de la trisectrice.

La *cartésienne* $\rho + k\rho' = 1$ a été imaginée par Descartes pour rassembler en un foyer unique les rayons réfractés, comme les coniques réunissent les rayons réfléchis. C'est la caustique secon-

ellipse; pour les ellipses homofocales, une hyperbole; pour des hyperboles concentriques et ayant un point commun, une cassinienne; pour les lemniscates de même centre et de mêmes axes, une lemniscate ayant ses axes à 45° sur ceux des premières. La théorie des trajectoires orthogonales est due à Jean Bernoulli.

(1) On appelle ainsi le lieu du sommet d'un angle dont les côtés sont tangents à une courbe donnée. Si l'angle est droit, on dit l'*orthoptique*. L'isoptique d'une cycloïde est une cycloïde allongée ou accourcie; l'orthoptique d'une conique à centre est un cercle concentrique; l'isoptique d'une orthogénide en est une autre. Le principe de cette théorie est dû à La Hire.

daire([3]) du cercle (Quételet); et la projection sur le plan de la base de l'intersection de deux cônes de révolution à axes parallèles (Quételet).

La *cassinienne* $\rho\rho' = 1$, a été proposée par Cassini pour essayer de représenter le mouvement des planètes, plus exactement que par l'ellipse. Cette courbe est un cas particulier de la *spirique*, section plane du tore. Le cas particulier le plus remarquable de la cassinienne est la *lemniscate*, dont s'est servi Jacques Bernoulli pour la construction de l'*isochrona paracentrica* de Leibniz, trajectoire d'un point qui s'approche uniformément d'un point donné. La lemniscate est une podaire et une inverse d'hyperbole, un cas particulier de l'orthogénide et de la courbe de Watt: c'est également la courbe que suit un point pesant A pour arriver à un point fixe B, dans le même temps que s'il suivait la droite AB (Bonatti).

Deux droites brillantes tournant uniformément autour de deux de leurs points, le lieu de leur intersection est une ligne obscure observée d'abord par Plateau. Cette courbe, remarquée auparavant par Mac Laurin, a été appelée *sectrice*, par M. Schoute; elle comprend, comme cas particuliers, le cercle, l'hyperbole, la strophoïde, la trisectrice, la sesquisectrice, etc.

L'*astroïde* $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ est l'enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur deux axes rectangulaires; c'est aussi

([3]) On appelle *caustique* d'une courbe l'enveloppe des rayons réfléchis ou réfractés sur cette courbe. La caustique par réflexion d'une circonférence ou d'une cardioïde pour des rayons parallèles est l'épicycloïde produite par le mouvement du point d'une circonférence roulant à l'extérieur d'une circonférence de rayon double; la caustique par réflexion d'une circonférence pour des rayons émanant d'un de ses points est une cardioïde; celle d'une cycloïde pour des rayons perpendiculaires à l'axe, est une autre cycloïde moitié moindre. Cette théorie a été créée par Tschirnhaus, et mise au point par les Bernoulli.

La *caustique secondaire* est la trajectoire orthogonale des rayons réfléchis ou réfractés; pour des rayons parallèles réfractés, c'est une conique à centre ou une cartésienne, selon que la courbe donnée est une droite ou un cercle.

une hypocycloïde, le cercle mobile ayant un diamètre égal au quart de celui du cercle fixe (Jean Bernoulli).

On appelle *courbe de poursuite* la ligne que suit un point mobile A se dirigeant constamment sur un autre point également mobile B, par exemple un vaisseau donnant la chasse à un vaisseau ennemi (Bouguer), ou un chien qui veut rejoindre son maître (Dubois-Aymé). Son équation est de la forme

$$y = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{-k+1}}{-k+1},$$

si le point B se meut en ligne droite. Dans les autres cas, on est conduit à des équations différentielles en général non intégrables. Ainsi on a proposé le cas d'un cercle (Brocard, *Nouv. Corresp.* 1877) et celui où le point A se meut sur une sphère dont la courbe B est un petit cercle [1] (Lecornu, *Int. Math.* quest. 65). Ed. Lucas a montré que *trois chiens se poursuivant après avoir été d'abord placés aux sommets d'un triangle équilatéral, ils décrivent des spirales logarithmiques*. Enfin on rappellera cette question de l'*Int. Math. un éclaireur s'approche d'un arbre pour mieux observer un parti ennemi, qui suit un chemin en ligne droite; quel trajet doit suivre cet éclaireur pour être toujours caché par l'arbre?* (Buray, 1896). On trouve, pour définition de la courbe, la relation $sy = kx$, où s désigne l'arc et k un coefficient.

Les *épi-* et *hypo-trochoïdes* sont les trajectoires du plan d'un cercle roulant à l'extérieur ou à l'intérieur sur un cercle fixe. Les *épi-* et *hypo-cycloïdes* sont les cas particuliers où les points décrivants sont sur le cercle mobile. Apollonius, pour rendre compte des irrégularités des orbites célestes, avait imaginé les *épicycles*, qui ne sont autres que des épicycloïdes; ces courbes ont ensuite été réinventées par Albert Dürer, Desargues et Römer. Elles sont d'un

(1) « Un voyageur, à l'exemple des rois Mages, s'astreint à diriger constamment sa course vers une étoile déterminée du ciel... déterminer sa trajectoire sur la sphère terrestre. »

grand usage dans le tracé des engrenages et dans les tours à guillocher. La développée d'une épicycloïde est une autre épicycloïde, ce qui montre que cette courbe est rectifiable.

La plus simple des courbes transcendantes est la *sinusoïde* $y = \sin x$. C'est la projection de l'hélice, ce qui la fait utiliser pour les *épures* des vis et les graphiques des mouvements circulaires.

La courbe qui a le plus occupé les géomètres est probablement la *cycloïde*. En outre de sa description si simple, on peut remarquer qu'elle est la trajectoire d'un poids tendant un fil qu'on enroule autour d'une circonférence placée dans un plan vertical. Huygens a trouvé qu'elle se reproduit dans sa développée et qu'elle est *tautochrone*, c'est-à-dire qu'un mobile pesant partant d'un point quelconque de cette courbe arrive au bas dans le même temps : d'où son ingénieux pendule *isochrone*. Jean Bernoulli a trouvé que la cycloïde est en outre la *brachystochrone*, c'est-à-dire la courbe que doit suivre un mobile entre deux points donnés, dans un minimum de temps; et qu'elle est la limite des développées successives et alternées d'une courbe quelconque, entre deux parallèles données[1]. Il l'a proposée pour la multisection des arcs et des segments circulaires. Newton, — toujours préoccupé de l'utilisation pratique des théories, — a fait incidemment remarquer combien il serait absurde de rechercher, par exemple, la valeur du côté du *kilogone* au moyen de l'équation du millième degré qui le détermine, tandis que l'emploi de la cycloïde le donne très aisément. Wren et Newton ont montré à se servir de cette courbe pour la solution du problème de Kepler, qui consiste à déterminer un secteur focal d'ellipse de surface donnée.

L'*hélice* se rencontre fréquemment dans la nature : plantes grimpantes, frisure du poil de certains animaux et plusieurs genres de gastéropodes actuels ou fossiles. L'industrie l'emploie également

(1) Entre deux droites concourantes, la courbe limite est une épicycloïde (*An. de Gerg.* t. IX).

très souvent : tire-bouchon, cordages, vis, guidages, machines à diviser, micromètres, rayures des canons d'armes à feu, etc ; mais c'est surtout la *surface hélicoïdale*, à plan ou à cône directeur, qui est d'une haute importance pratique, depuis l'escalier tournant, le moulin à vent, la merveilleuse vis d'Archimède jusqu'à l'hélice qui meut les vaisseaux et demain permettra de réaliser le nouveau prodige cherché si longtemps de l'aviation.

La *spirale d'Archimède* $\rho = \omega$ sert au tracé de certaines *cames*, pour l'ornementation dans l'architecture (volute ionienne) et dans la ferronnerie. Certains coquillages, la section d'un rouleau de papier, un cordage enroulé la figurent également. Clairaut a donné de cette courbe la construction suivante : *faire rouler une droite sur une circonférence; tout point lié à cette droite et qui en est distant d'une longueur égale au rayon du cercle, trace la spirale.* Archimède a créé la géométrie infinitésimale à l'occasion de cette courbe, particulièrement en montrant que sa sous-normale est constante.

L'inverse de cette ligne est la *spirale hyperbolique* $\rho\omega = 1$, qui est le lieu des extrémités des arcs circulaires égaux ayant même centre et leur rayon d'origine sur une même droite. Elle est la perspective d'une hélice vue d'un point de l'axe.

La spirale la plus intéressante est la *spirale logarithmique* $\rho = e^{\omega}$, qui se reproduit dans son inverse, son homothétique, sa podaire, ses caustiques, etc, à tel point que Jacques Bernoulli eût désiré qu'on traçât cette courbe sur son tombeau avec cette inscription : « *Eadem mutata resurgo.* » Le dessin de certaines fleurs et de certaines ammonites, le motif suivant lequel sont implantés les cheveux, paraissent être ceux de spirales logarithmiques. Cette courbe est *isotrépente* [1], ce qui la fait employer dans plusieurs mécanismes. J. Bertrand a montré que les podaires successives d'une même courbe tendent vers une spirale logarithmique.

[1] On appelle ainsi les courbes qui ont pour épicycloïdale une circonférence, et qui par conséquent peuvent donner un système de deux roues roulant l'une sur l'autre autour de deux points fixes. L'ellipse est également isotrépente par rapport à son foyer. Euler est l'auteur de cette théorie.

La *développante de cercle*, produite, comme on sait, par un point d'un fil enroulé sur une circonférence, et qu'on déroule en le maintenant toujours tangent, — est employée dans nombre d'appareils mécaniques : ponts-levis, crémaillères, excentriques, cames, turbines. Son inverse est la *spirale tractrice*, qui a ses tangentes égales (Giard) ; elle est une podaire de la spirale hyperbolique (Mac Laurin) et de plus on a la relation $s = k\mathrm{L}\rho$ (Cotes).

La *cochléoïde* $\rho\omega = \sin\omega$ est l'inverse de la quadratrice ; c'est le lieu des extrémités des arcs circulaires ayant le vecteur comme rayon et égaux à la partie qu'il laisse sur une perpendiculaire à l'axe. C'est aussi la perspective d'une hélice vue d'un de ses points, et la *barycentrique* [1] des arcs circulaires de même origine et de même rayon.

La *logarithmique* $y = \mathrm{L}x$ ou $x = e^y$ est le profil d'une tour ou d'une pile de viaduc supportant une pression verticale constante dans toutes ses parties (Poncelet). C'est aussi la trajectoire d'un corps dans un milieu résistant comme la vitesse (Huygens). Sa sous-tangente est constante (id.)

La *chaînette* (catenaria) $y = e^x + e^{-x}$ est la figure d'une chaîne pesante et de section constante. Elle a son centre de gravité plus bas que celui de toute courbe isopérimètre passant par deux points de niveau. C'est aussi la *velaria*, courbe d'une voile tendue par un vent agissant sur elle normalement (Jean Bernoulli). C'est le profil théorique des voûtes d'épaisseur constante (Y. Villarceau).

La courbe précédente a donné l'idée de plusieurs autres courbes, entre autres la *chaînette d'égale résistance* $y = \mathrm{L} \cos x$, forme qu'affecte un fil de section variable dont la tension reste constante dans toutes les sections. C'est la courbe des voûtes sans surcharge (Y. Villarceau).

La chaînette est la développée de la *tractrice* (tractoria) définie par la relation $s = \mathrm{L}y$ ou par la propriété qu'elle possède d'avoir sa tangente constante. C'est le lieu des extrémités d'une droite

(1) Lieu des centres de gravité.

pesante tirée en ligne droite par son autre extrémité. Elle est l'orthoptique de la logarithmique. Sa première considération est due à Leibniz.

L'*élastique* (elastica) $x^2ds = dy$ est la courbe décrite par l'extrémité d'une verge fixée par l'autre extrémité, et qui est écartée de sa position d'équilibre. Son rayon de courbure est partout inversement proportionnel à l'abscisse (Jacques Bernoulli). Elle est aussi la figure (*lintearia*) d'un linge pressé par un liquide pesant (Id.). C'est, de toutes les courbes isopérimètres, celle à laquelle répond le volume de révolution minimum (Euler). Cette courbe est utilisée, pour le tracé des *galbes* de colonnes (1) ; elle s'emploie aussi pour *raccorder* les courbes sur les épures.

On terminera cette note en renouvelant, — en faveur de ceux qui ne veulent qu'avoir une idée générale des mathématiques, — le vœu de voir diviser l'algèbre et la géométrie, non plus en partie élémentaire et en partie supérieure, mais en choses simples et en choses compliquées. Au lieu de s'attarder à une foule de questions trop particulières, il semble qu'il y aurait avantage à étudier les principes de l'algèbre et de la géométrie infinitésimales, qui éclairent de si vive manière les éléments eux-mêmes et ouvrent des horizons si nombreux et si inattendus sur la nature et les propriétés des êtres mathématiques. Un aperçu de la théorie des nombres et de la géométrie des courbes, — qui ne nécessitent que peu de connaissances préalables, — intéresserait sûrement davantage que les compléments d'algèbre et de géométrie habituellement enseignés ; on contribuerait ainsi à la diffusion de la science, en substituant une atmosphère de popularité et de confiance au nuage dogmatique, dont on l'entoure dès le début et qui rebute les néophytes.

Quelques amusettes. — Les bons recueils de problèmes de géométrie ne manquent pas, mais ils se préoccupent surtout d'il-

(1) La conchoïde a été également employée dans le même but.

lustrer les théories. Cependant quelquefois ce n'est pas la grande route qui est le trajet le plus court, mais un sentier de traverse que n'indique aucune carte. A titre d'exemple, voici deux questions très simples.

La construction d'un octogone dont on donne un côté se traite aisément en construisant un carré sur la longueur donnée et en menant ses diagonales (Aboul-Vefa).

Le problème de *construire un carré dont les côtés passent par quatre points donnés* A, B, C, D, se résout très simplement en tirant AC, menant BE perpendiculaire et égal à AC : la droite ED est un des côtés cherchés (Biandsutter).

Il serait du plus haut intérêt de réunir une collection d'artifices de ce genre.

Carrelages. Aux renseignements, donnés t. II, on pourrait ajouter ce qui suit.

M. Broch (A. F. 1874) a appliqué la théorie des nombres à cette étude et a donné de curieux dessins obtenus par la considération des résidus quadratiques.

Les Arabes ont trouvé dans ce genre d'ornementation, une foule de combinaisons de lignes souvent très heureuses et originales. Consulter à ce sujet J. Bourgoin, *Les élém. de l'Art Arabe* (Paris, 1877). On peut en citer deux types de carrelages simples : le *pellecoïde*, formé d'un demi-cercle complété par deux quarts de cercle tangents, et la fig. 153, qu'il serait intéressant de voir généraliser.

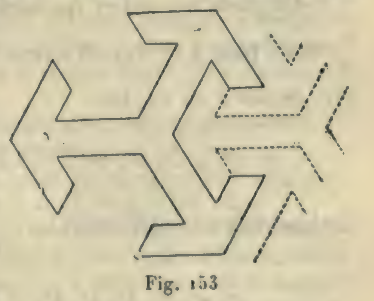


Fig. 153

L'emploi du carton, fig. 26, permettrait de trouver de nouvelles combinaisons de carreaux pleins ou mi-partis, ainsi qu'une récréation ayant pour objet de reproduire un carrelage donné.

Considérons, par exemple, les nombres 1, 3, 4, 9, 10, 12, et 13,

qui sont les restes obtenus en divisant par 13 les carrés entiers 1, 4, 9, 16, 25, ... Dans un échiquier de 13^2 cases, une case sera blanche si le n° de sa colonne ou bien celui de sa rangée est un de ces sept nombres ; elle sera noire si ces deux n^{os} en font partie ou bien si aucun d'eux n'en fait partie : ainsi les cases (3, 9) et (2, 11) seront noires, et les cases (3, 11) et (2, 9), blanches. On peut reproduire cet échiquier symétriquement ou complémentairement, comme il est indiqué t. II, pp. 38 et 40, ou bien par symétrie polaire, ou encore en permutant les deux moitiés de droite et de gauche, ou celles du haut et du bas : on aura ainsi de nouveaux échiquiers de 26^2 cases.

Le procédé suivant, dû à Gand (*Le transpositeur ou improvisateur*, Paris, 1871), donne des résultats bien plus nombreux et bien plus variés. Soit un échiquier de n^2 cases, dont celles d'une même diagonale sont noires, et toutes les autres, blanches. On déplacera les colonnes[1], de manière que, α étant le reste de la division de $ak + 1$ par n, la $\alpha^{ème}$ colonne devienne la $a^{ème}$, k variant de 0 à $n - 1$ et a désignant un entier quelconque premier avec n et inférieur à $\frac{n}{2}$. Ainsi pour $n = 29$, on fera $a = 2, 3, 4, 5, \ldots 14$; si, par exemple, on fait $a = 12$, les

$$1^e, 13^e, 25^e, 8^e, 20^e, 3^e, 15^e, 27^e, 10^e, 22^e, 5^e, 17^e, \ldots$$

deviendront respectivement les

$$1^e, 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e, 8^e, 9^e, 10^e, 11^e, 12^e, \ldots$$

[1] On peut les supposer réalisées matériellement en bois ou en carton.

On aura ainsi tous les *satins* [1] du *module* 29 [2]. En les superposant deux à deux, trois à trois, ... ; en les dilatant ou en les contractant, en entier ou partiellement ; en prenant les symétriques ou les complémentaires, etc ; on obtiendra un grand nombre de mosaïques, la plupart très élégantes. A la simple diagonale de l'échiquier primitif, on peut aussi adjoindre d'autres lignes de cases noires qui lui soient parallèles, ou encore remplacer certaines cases blanches par des cases de couleur, etc. On voit comme on peut ainsi augmenter indéfiniment le nombre des motifs déduits de cette simple considération. C'est-là un joli exemple de l'utilité des mathématiques pour aider l'imagination du dessinateur dans la recherche d'effets nouveaux.

Construction de carrés. La récréation souvent proposée de construire des assemblages de carrés avec des longueurs égales données, peut être étendue aisément : ainsi on peut demander de faire deux carrés avec dix lignes ; trois carrés avec dix, onze, treize, seize, dix-

(1) On appelle *satin* un dessin d'origine chinoise, composé d'échiquiers contenant des cases noires disposées en parallélogrammes, de manière que, dans chaque échiquier, chaque colonne et chaque rangée n'en contiennent qu'une seule.

Si n est la somme de deux carrés premiers entre eux, on peut obtenir un satin de carrés ; et un seul ; tels sont les cas de

$n = 5, 10, 13, 17, 25, 26, 29, 34, 37, 41, 50, 53, 58, 61, 65, 73, 74, 82, 85, 89, 97, \ldots$
$a = 2, 3, 5, 4, 7, 5, 12, 13, 6, 9, 7, 23, 17, 11, 8, 27, 31, 9, 38, 55, 22, \ldots$

la valeur de a est donnée par la relation $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Ce remarquable théorème est dû également à Gand (*Bull. de la soc. indust. d'Amiens, 1867*).

Si n est de la forme $x^2 - 1$, la valeur $a = x$ donne un satin de losanges symétrique par rapport à la diagonale.

(2) En réalité il n'y a que les valeurs $a = 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12$ qui donnent des satins distincts : les autres reproduisent les premiers symétriquement ou après rotation.

Cette très intéressante théorie a été exposée en détail et ses principes démontrés par Santos, Ledent, Renouard et Lamoitier dans les années 1891, 1899 et 1901 de l'*Industrie textile*. Voir aussi Ed. Lucas, *Nouv. Corresp.*, 1877 et *Atti d. R. Ac. d. Sc.*, Turin, 1883 ; Frolow, *Les carrés magiques*, 1886 ; Laisant, A. F., 1887 ; Arnoux, *Les espaces arith.*, 1898.

huit lignes ; quatre carrés avec dix-neuf lignes ; cinq avec onze lignes ; six avec vingt lignes, etc.

De même, en définissant les carrés par leurs sommets, on peut proposer de faire, de plusieurs manières, deux carrés avec six ou sept pions ; trois carrés avec sept ; quatre carrés avec huit ; cinq ou six avec neuf ; six ou sept avec dix ; huit avec douze ou treize ; $5n - 4$ carrés avec $4n + 1$; etc.

Les déménagements. Aux sommets de deux pentagones OABCD *et* O*abcd ayant l'angle* O *commun, se trouvent neuf maisons réunies par des chemins figurant les côtés. La maison* O *est vide, et les habitants de* A, B, C, D *veulent échanger leurs logements avec ceux de a, b, c, d, en profitant de la maison vide* O *et de celles qui le seront successivement, et en s'astreignant à n'utiliser chaque fois que la maison vide la plus voisine. Combien y aura-t-il de déménagements ?* Réponse : trente. — On pourrait se donner tout autre disposition initiale, le nombre de déplacements varierait en conséquence.

Certains, partant de ce principe que *trois déménagements équivalent à un incendie,* concluront que longtemps avant la fin de l'opération, il ne restera plus rien à déménager et qu'alors la question sera résolue ipso facto. Mais quel livre même sérieux ne fait-il pas usage de conventions plus ou moins plausibles, depuis celui qui demande à un milligramme près le poids d'une sphère en argent grosse comme la terre et celui qui fait calculer le prix de la *peinture* d'un « rouleau employé en agriculture », jusqu'à la géométrie qui s'appuie sur un postulatum indémontrable et l'astronomie qui s'appuie elle-même sur cette même géométrie ?

L'évasion du prisonnier. Dans la cellule O (fig. 154) *d'une prison, est enfermé un homme que, pour le rendre sympathique, on supposera un prisonnier de guerre. Les cellules de cette prison communiquent par des portes simplement poussées, mais ne pouvant s'ouvrir que dans un sens ; et en outre par des portes* A, B, C, D, E, F, G *ayant leurs clés*

en a, b, c, d, e, f, g ; Indiquer le trajet que doit suivre le prisonnier pour s'évader.

Il manœuvre de manière à recueillir les clés *d*, *e* ; ouvre les portes E, D ; s'empare de la clé *c* qui lui sert à passer par C, puis la clé *a* qui lui permet de passer par A ; prend la clé *b* ; repasse par E et D, franchit B ; prend *f*, repasse E, franchit F ; prend *g* et finalement sort par la porte G, en recouvrant une liberté qu'on trouvera sans doute bien gagnée, car il lui a fallu franchir quatre-vingt-quatre portes et faire bien attention à sa manœuvre.

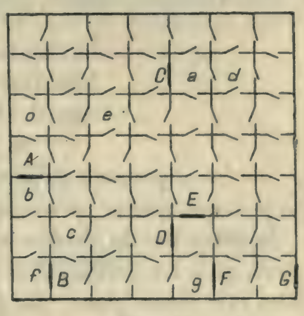


Fig. 154

Question du puits. Je ne vois traitée nulle part cette assez intéressante devinette, qui m'a été proposée il y a longtemps.

Un puits appartient aux propriétaires de plusieurs maisons A, B, C, ... *lesquels arrivent à se fâcher avec ceux d'autres maisons a, b, c,... situées entre les premières et le puits, en rayonnant tout autour de celui-ci. Les premiers décident de construire un mur qui leur laisserait l'accès du puits et l'interdirait aux autres : ils demandent comment tracer ce mur.*

Ne me mêlant jamais des affaires des autres, je me garderai de leur indiquer la solution — très facile du reste, — crainte des représailles de MM. de *a*, de *b*, de *c*, etc.

Jeu des dix lettres. Il semble que la question t. II, p. 60, pourrait être présentée d'une manière plus intéressante, en la transformant ainsi : *disposer les lettres* A, B, C, D, E, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *de manière que chaque majuscule puisse arriver sur sa correspondante minuscule, en franchissant une majuscule et une minuscule.* La solution est donnée ci-dessous :

*da*CDA*e*B*c*E*b*

et le mouvement se fait dans l'ordre des lettres, A sur *a*, B sur *b*, etc. On se rappellera la disposition à donner en s'aidant d'une phrase mnémotechnique, telle que la suivante :

*d'a*visés Chercheurs Diront :
Attention ! *e*t Bientôt
*c*rîront : Eureka ! *b*ravo !

Sur les alignements de points. Aux exemples donnés t. II, p. 21, on pourrait ajouter les suivants.

Joignant par des droites les sommets et les milieux des côtés d'un carré, puis les intersections de ces droites, on arrivera aisément à faire avec treize pions, dix-huit lignes de trois, et avec dix-sept, vingt-huit lignes, etc. — Dans un carré, on inscrit un second carré et dans celui-ci un troisième : on a ainsi avec dix-sept pions, vingt-quatre lignes.

On obtient des jeux plus intéressants en prenant des pions de couleurs différentes. Ainsi avec un pentagone étoilé, on peut placer cinq pions blancs et cinq noirs sur cinq lignes contenant chacune deux noirs et deux blancs [1]. Avec l'ensemble de deux triangles qui se coupent (hexagone étoilé), on peut mettre trois blancs, trois noirs, trois rouges et trois verts sur six lignes, qui en contiennent un de chaque sorte [2]. La figure formée d'un octogone étoilé régulier avec ses diagonales permet de placer huit pions noirs et huit blancs sur douze lignes contenant chacune deux noirs et deux blancs.

On terminera cette énumération qu'il serait facile de continuer, en signalant la fig. 155, qui contient quatorze lignes de deux noirs

[1] Les deux pentagones étoilés ayant pour sommets ceux d'un pentagone régulier et les milieux de ses côtés, forment, en menant en outre les diagonales, quinze lignes pouvant recevoir vingt-cinq pions, soit trois noirs et deux blancs sur chacune.

[2] Menant les diagonales et joignant les six sommets aux six intersections des côtés, on pourra placer trente-sept pions sur vingt-quatre lignes contenant chacune trois pions noirs et deux blancs.

et de deux blancs. Mettant des blancs aux points tels que A, des noirs aux points B, des rouges aux points C et D, on aura quatorze lignes identiques contenant chacune deux blancs, deux noirs et deux rouges. La même fig. permet de construire avec vingt-huit pions,

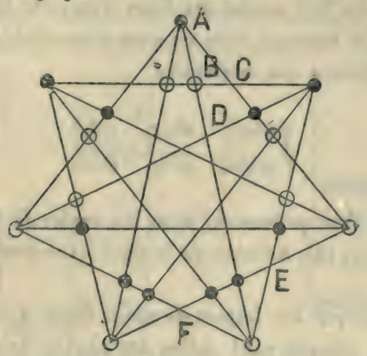


Fig. 155

quatorze lignes de cinq pions. Enfin si on ajoute les lignes telles que AE, AF, on arrivera à un assemblage de trente-cinq lignes de quatre pions.

Jeux du tétraèdre et du cube. 1° *Ecrire les lettres a, b, c, d affectées des indices* 1, 2, 3, *dans les douze angles des faces d'un tétraèdre, de manière que les trois indices, et que les combinaisons*

(α) $$abc,\ bcd,\ cda,\ dab$$

se retrouvent dans les quatre faces comme dans les quatre trièdres. La solution, très facile, se fait en écrivant respectivement dans les quatre trièdres, les annotations suivantes

$$a_1,\ b_2,\ c_3\,;\quad b_1,\ c_2,\ d_3\,;\quad c_1,\ d_2,\ a_3\,;\quad d_1,\ a_2,\ b_3.$$

Une autre question à propos du tétraèdre, — comme il n'est pas possible d'assembler huit tétraèdres réguliers égaux, de manière à

obtenir le tétraèdre de dimensions doubles, — est de rechercher comment il faudrait partager un ou plusieurs de ces tétraèdres pour arriver au résultat indiqué. Mais on se contentera ici de poser cette question, quitte à y revenir ailleurs.

2° *Ecrire dans les huit angles des faces d'un cube les lettres a, b, c, d, de manière qu'en tournant dans un sens déterminé, les six faces présentent les permutations non tournantes*

(β) $\begin{cases} abcd, & abdc, & acbd \\ acdb, & adbc, & adcb \end{cases}$

et que les huit trièdres présentent dans les angles de leurs faces, deux fois les combinaisons (α). A l'aide de la fig. 156 ci-dessous, on résoudra la question.

On remarquera que les lettres de deux faces d'un trièdre quelconque sont celles des angles de la troisième face non opposés à celui du trièdre ; et que deux lettres diamétralement opposées sont identiques, ce qui fait que les permutations inscrites dans deux faces opposées sont les mêmes, mais doivent être lues dans des sens opposés.

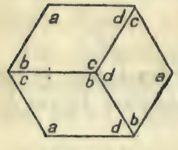


Fig. 156

Jeu des six carrés. Ecrire les six permutations (β) *sur les côtés de six carrés et disposer ceux-ci de manière à avoir douze lignes présentant deux fois ces mêmes permutations.* On vérifiera aisément que les conditions du problème ne peuvent se réaliser pour trois carrés en équerre : il est donc inutile d'essayer toute disposition où on lirait les résultats parallèlement aux côtés.

La solution s'obtient en disposant les six permutations comme ci-dessous (fig. 157), les lignes étant prises parallèlement aux diagonales.

Jeu des quatre cubes. Les dés à jouer sont ordinairement marqués d'une telle manière que, dans deux faces opposées, le nombre total

des points soit 7. *Il ne peut y avoir que deux sortes de dés présentant cette particularité.*

Avec deux dés de chaque sorte, faire un carré tel que le total des points vus en dessus fasse 14, et qu'il en soit de même quand on retourne chacune des deux rangées ou chacune des deux colonnes, d'un, de deux ou de trois quarts de tour. La solution est donnée dans la

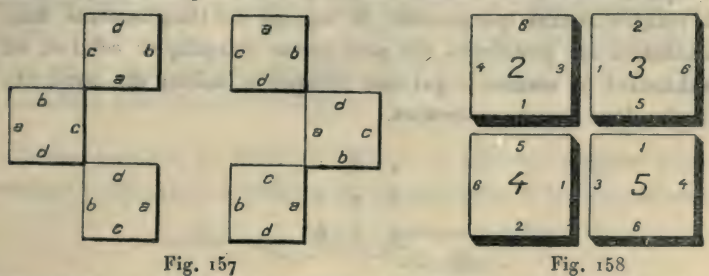


Fig. 157 Fig. 158

figure 158, où les nombres indiqués sur les côtés indiquent les numéros des faces voisines.

La théorie assez intéressante de ce jeu repose sur la considération des trois groupes

1, 2, 5, 6 ;
3, 4, 2, 5 ;
4, 6, 3, 1 ;

les seuls qui puissent donner la somme 14, avec des nombres non répétés et inférieurs à 7. Ils donnent aussi la solution de cette question : *placer les douze nombres* 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 *sur trois rangs, de manière que chaque rangée donne un même total, et que dans chaque colonne, le plus grand terme soit égal à la somme des deux autres.*

On en tire aussi le tableau suivant, qui a les mêmes propriétés et qui utilise les douze premiers entiers :

1, 2, 11, 12 ;
9, 4, 8, 5 ;
10, 6, 3, 7.

Jeu des neuf pions. Disposer en carré les neuf premiers entiers, de telle sorte que le nombre inscrit dans un angle quelconque additionné avec ses deux voisins, donne une somme constante. Ceux qui sont peu familiarisés avec l'analyse indéterminée auront quelque peine à trouver les solutions de cette question, tandis que ce n'est qu'un jeu quand on s'aide de cette théorie, qui n'est d'ailleurs que l'art de réduire, autant que possible, le nombre des tâtonnements dans la solution des problèmes. On peut même compliquer celui-ci, en se donnant le nombre n qui doit occuper le milieu du carré. On l'écrira donc comme ci-dessous.

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & n & e \\ f & g & h \end{matrix}$$

On verra aisément : 1° que les sommes $a + h$ et $c + f$ ont une même valeur, qu'on appellera A ; 2° que A est ≥ 5 et ≤ 15 ; 3° que A et n sont de parité différente ([1]).

Soit $n = 7$: on aura à examiner les cinq cas A = 6, 8, 10, 12, 14, d'où les sept hypothèses suivantes pour les valeurs de a, h, c et f :

1, 5, 2, 4 ; 2, 6, 3, 5 ; 1, 9, 2, 8 ; 1, 9, 4, 6 ; 2, 8, 4, 6 ;
3, 9, 4, 8 ; 5, 9, 6, 8.

La première peut s'écrire :

$$\begin{matrix} 1 & b & 2 \\ d & 7 & e \\ 4 & g & 5 \end{matrix}$$

([1]) Cette dernière assertion se vérifie en remarquant que B désignant la somme constante $a + b + d$, $b + c + e$,... on a :

$$2B + A = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 - n.$$

les nombres restants étant 3, 6, 8, 9, on voit qu'il faut écrire $d = 9$, $e = 8$, $b = 6$, $g = 3$. Les autres hypothèses produisent également d'autres solutions, sauf la troisième.

Opérant de même sur les valeurs $n = 5, 6, 7, 8, 9$, on trouve respectivement une, quatre, quatre et six solutions : et si on remarque que toute solution relative à $n = 7$, par exemple, en donne une relative à $n = 3$, en y prenant partout les compléments à 10, on arrivera à cette conclusion que le problème comporte quarante-deux solutions différentes.

Quatre questions de chemin de fer. — 1° *Un train composé d'une machine* L (fig. 159), *de voitures de marchandises* M *et de voitures de*

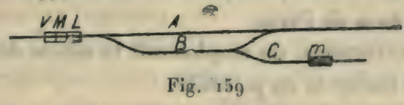


Fig. 159

voyageurs V, *arrive dans une gare formée d'une voie d'évitement* B *et d'une voie de garage* C. *Manœuvrer le train de manière que les wagons* m *et* M *prennent la place l'un de l'autre sans que jamais il y ait aucun wagon sur la voie principale* A *qui ne soit accompagné de la machine.* Le train va prendre m, qu'il laisse sur B, repasse par A et reprend m. L repasse par A et se place à gauche de m, puis le tout pousse V et M sur C ; L et m reviennent sur B ; L faisant le tour par A, va

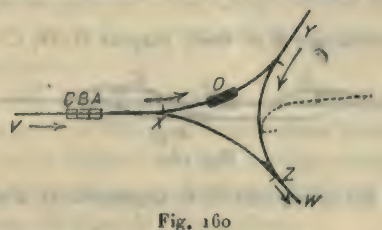


Fig. 160

reprendre V qu'elle accroche à m, et refaisant encore le tour seule, revient s'accrocher en avant de m.

2° Les changements de voie peuvent se faire automatiquement ; de sorte qu'un train venant de l'une quelconque des deux voies

XY, XZ, (fig. 160) d'un branchement, va de lui-même sur la voie unique XV, tandis que, partant de la voie simple, il ne peut aller que sur une voie déterminée XY qu'on représentera par un trait placé au point de dédoublement.

Ceci posé, il s'agit de *réunir des voies ferrées rayonnant autour d'un point central par des systèmes d'aiguillages automatiques tels qu'un train venant de l'une quelconque de ces lignes puisse prendre l'une quelconque des autres, toujours machine en tête*. Pour trois directions, on a la fig. 160. Ce dispositif est employé dans certains pays où le terrain a peu de valeur, pour retourner les locomotives ([1]), au lieu de faire la dépense d'un pont tournant. On emploie du reste aussi pour cela le terminus en *raquette*, comme au chemin de fer de Sceaux, ou au Métropolitain de Paris.

Pour quatre directions, on emploierait la même disposition avec, en plus, la voie indiquée en pointillé.

3° *Un convoi formé d'une machine* A (fig. 160), *de wagons de marchandises* B *et d'autres wagons de voyageurs* C, *arrive par la voie* V *et doit repartir par la voie* W, *après avoir échangé le wagon* B *contre le wagon* O *situé sur* XY. *Indiquer la manœuvre, les aiguillages se faisant automatiquement.* Laisser C, franchir avec AB, l'aiguille X, accrocher O, franchir avec OAB, les aiguilles Y, Z, X, Y ; reprendre C ; franchir les aiguilles X, Y, Z, X ; détacher B, et franchir enfin Y et Z.

4° *On a une locomotive* A *et trois wagons* B, O, C *disposés comme*

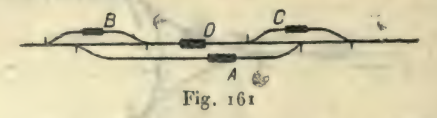


Fig. 161

dans la fig. 161. *En se servant de la locomotive et d'aiguillages auto-*

([1]) Le poids des locomotives tendant à augmenter de plus en plus, on y revient aujourd'hui. Seulement, pour réduire la surface du terrain nécessaire au développement des voies, on a proposé de croiser les deux tronçons XY, XZ ; ou encore d'employer un quintuple rebroussement en forme de pentagone étoilé.

matiques, permuter les deux wagons B *et* C. La machine A va en X, pousse B, puis O, puis C, et le tout va en Z, puis en Y, où on laisse C. Alors A, B, O viennent en X, puis en Z, puis en Y, où l'on accroche C, et le tout revient en X. On y laisse C, et A, B, O, retournent en Z, puis en Y, où on laisse O, que A et B viennent reprendre, après avoir refait le tour par X, Z et Y ; A et B refont le même tour ; B est laissé en Y ; et A, après un nouveau tour, vient le chercher et l'amène en X, où sont alors C, O, B, A. Il ne reste plus qu'à conduire successivement C, O et B, après quoi A retourne à sa place.

Usage et abus du langage géométrique. On se contentera de citer ces deux extraits de journaux.

« Il a mérité de voir s'étaler sur les murs de B... une affiche donnant le graphique de ses variations. En abscisses, les dates très rapprochées de ses changements d'opinion et de parti ; en ordonnées, les indications de ces opinions et de ces partis, ce qui forme une vraie salade russe. » Ces deux images, du graphique et de la salade russe, sont expressives, mais peut-être trouvera-t-on que la transition de l'une à l'autre est insuffisante.

«... le nouveau réglement élaboré en haut lieu vient de faire à la géométrie, dans l'instruction professionnelle des chauffeurs, une place qu'elle ne songeait pas à réclamer... Voici en effet le premier paragraphe de l'art. 2 du règlement en question. Il s'agit de la place des lanternes :

Ce centre de la source lumineuse sera à la même hauteur que celui de la plaque et à l'intersection de deux plans verticaux, l'un parallèle à l'axe du véhicule et situé à quinze centimètres à gauche de l'inscription, l'autre perpendiculaire et distant de quinze centimètres au moins du plan de l'inscription.

Je ne sais pour quelle cause, en dépit de la source lumineuse, je ne distingue pas très bien... Ce que les chauffeurs auraient de mieux à faire, c'est de supposer le problème résolu et de placer leur lanterne le mieux possible. »

Cette dernière réflexion est de toute raison : cultivons et aimons les mathématiques, mais ne les faisons pas intervenir où elles n'ont que faire, à moins qu'elles n'apportent quelque éclaircissement dans le langage. N'imitons pas ce mathématicien de grande taille, lequel s'apercevant que le lit où il doit coucher est trop petit, — au lieu d'essayer de se placer suivant la diagonale, ou tout au moins de mesurer celle-ci, — commence par mesurer sa longueur et sa largeur ; ce qui, moyennant deux élévations au carré et une extraction de racine, lui permet de constater que la diagonale est supérieure à sa propre longueur. Après quoi, il peut se livrer consciencieusement aux douceurs du repos et rêver qu'il offre une *kilombe* [1] à Pythagore, — en remerciement du secours que lui a apporté son merveilleux théorème en le tirant si heureusement d'un mauvais pas ; — et qu'il projette un traité sur la haute utilité de la géométrie, ainsi que sur l'infériorité de celui qui n'est pas géomètre, ce qui, d'après Pascal, est un grand défaut.

Deux applications des propriétés du centre de gravité. 1° *Les milieux des côtés d'un polygone convexe* ABCDEF... *forment un polygone plus petit ; de même, les milieux des côtés de celui-ci en forment un troisième encore plus petit ; et ainsi de suite. Trouver le point limite vers lequel tendent tous ces polygones.* Ce point n'est autre que le centre de gravité du polygone proposé, et on le déterminera ainsi : joindre les milieux A', B' de AB et de BC ; le milieu A'' de $A'B'$ au milieu B'' de CD ; le point A'', au tiers de $A''B''$, au milieu B''' de DE ; le point A'''' au quart de $A'''B'''$, au milieu B'''' de EF ; etc. Le dernier point ainsi obtenu est le point cherché. (Montucla).

2° Gergonne, dans le t. III de ses *Ann.* montre ainsi que *si* A, B, C,... *est une suite croissante et a, b, c,... une autre suite ayant*

(1) On sait qu'une légende — absurde d'ailleurs, — veut que l'illustre philosophe offrit une hécatombe aux dieux à la suite de la découverte qu'il fit, — croit-on, — de la relation existant entre les trois côtés d'un triangle rectangle.

un même nombre de termes, la somme $S = Aa + Bb + Cc + \dots$ *sera maximum si la suite a, b, c, ... est décroissante, et minimum si elle est croissante.* En effet la relation

$$Aa + Bc + Cb + \dots \lesseqgtr S,$$

par exemple, entraîne cette autre

$$(B - C)(c - b) \lesseqgtr 0.$$

Cette démonstration est insuffisante : on voit bien qu'on diminue ou qu'on augmente la somme suivant les cas en changeant deux lettres ; mais rien ne dit, que si on changeait à la fois plus de deux lettres, on n'arriverait pas à un résultat encore plus petit ou plus grand. Cependant le théorème est exact ; pour le démontrer, on posera, pour abréger

$$Ax + By + \dots + Cz = (xy \dots z)$$

soit $(xy \dots z)$ une permutation de k lettres, et soit

$$(ab \dots c) \lesseqgtr (xy \dots z) :$$

on aura, avec une lettre plus petite de plus, d,

$$\begin{aligned}(ab \dots cd) \lesseqgtr (xy \dots zd) &\lesseqgtr (xy \dots dz)\\ &\lesseqgtr \dots\dots\\ &\lesseqgtr (xd \dots zy)\\ &\lesseqgtr (dy \dots zx).\end{aligned}$$

Cette permutation en donne donc $k + 1$ autres dans le même cas, et il en est de même de chacune des $k\,!$ permutations. Or on a :

$$(ab) \lesseqgtr (ba),\ (ac) \lesseqgtr (ca),\ (bc) \lesseqgtr (cb)$$

d'où

$$(abc) \lesseqgtr (bac) \lesseqgtr (bca) \lesseqgtr (cba)$$
$$\lesseqgtr (acb) \lesseqgtr (cba).$$

La proposition est donc vraie pour trois lettres : elle est donc générale.

On peut en donner une figuration géométrique [1], qui en fournit une explication, sinon une démonstration, intuitives. Considérons une figure formée de rectangles accolés et ayant un axe commun ; soient A, B, C, ... les surfaces de ces rectangles, et a, b, c, ... les distances de leurs centres de gravité à un point de l'axe. La distance g du centre de gravité G de l'ensemble sera donnée par l'équation

$$(\alpha) \qquad g(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \ldots) = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \ldots$$

On conçoit que G est d'autant plus éloigné que les plus grands rectangles sont les plus éloignés et d'autant plus rapproché qu'ils sont les plus rapprochés ; de là, en tenant compte de (α), la démonstration annoncée.

Quadrature de figures rectilignes. La question de *partager un polygone de telle manière que ses parties assemblées différemment en reproduisent un autre équivalent* a été traitée entièrement [2] (voir I. M. 1896, p. 92). On peut se demander de déterminer des polygones qui ne demandent pour cela que d'être partagés en un nombre donné de

(1) On peut en énoncer un cas sous cette forme : *une usine veut faire des dépôts d'importances* A, B, C,... *dans des villes éloignées de distances a, b, c,... Comment choisir ces succursales de manière à avoir un minimum de transport ?*

(2) Dans l'historique de ce problème, on n'a pas cité cette question de Gergonne : *pour boucher un trou pentagonal, on a, par mégarde, découpé un pentagone égal mais à l'envers de l'étoffe. Comment s'y prendre pour utiliser ce pentagone à l'endroit ?*

parties ; tel est le rectangle $a \times b$, qui peut, par une division en deux parties, se transformer en un autre rectangle

$$a \frac{k+1}{k} \times b \frac{k}{k+1} :$$

on le partage suivant un escalier de k marches s'appuyant sur la diagonale.

On peut se proposer aussi de trouver des polygones qui, divisés par deux droites rectangulaires, produisent un carré. Tels sont les polygones figures 162 et 163. Le second offre six cas remarquables :

$d = -a$; $e = d = 0$; $b = e$; $d = -c$ et $b = 0$; $a = c = -d$; $d = -a$ et $b = 0$.

Ces deux derniers cas donnent deux démonstrations connues du

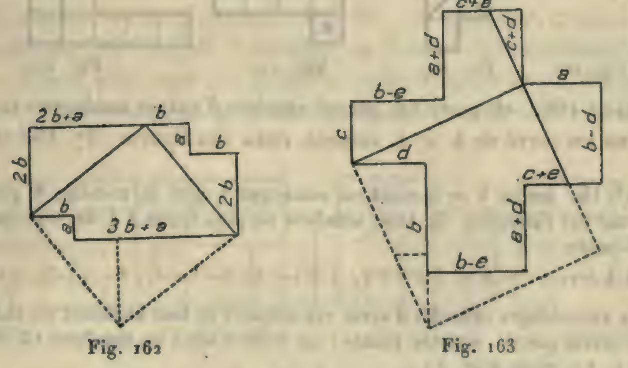


Fig. 162 Fig. 163

théorème de Pythagore, dont la figure 163 n'est d'ailleurs qu'une généralisation.

Certains assemblages de carrés égaux peuvent de même être partagés par des droites perpendiculaires, de manière à pouvoir se transformer en carré. Ainsi les onze assemblages de cinq carrés sont dans ce cas, sauf celui qui a la forme d'un T et celui où les cinq carrés sont sur la même ligne. Exemple, figure 163 *bis*.

Les trois assemblages de huit carrés compris dans un carré de 3 × 3, sont dans le même cas, sauf celui où le vide est au milieu.

De même les cinquante-quatre[1] assemblages de huit carrés

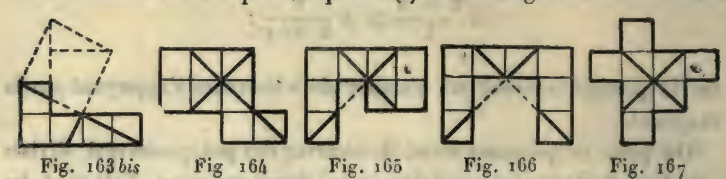


Fig. 163 *bis* Fig 164 Fig. 165 Fig. 166 Fig. 167

compris dans un rectangle de 3 × 4, tels que ceux des figures 164,

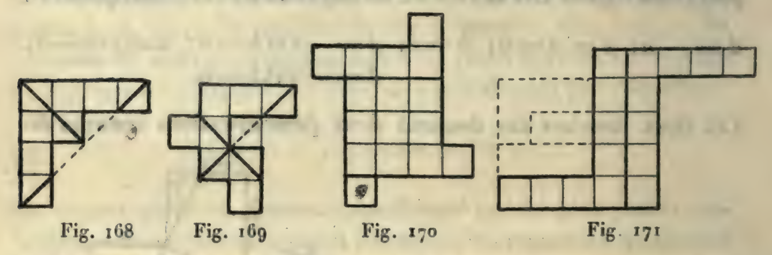


Fig. 168 Fig. 169 Fig. 170 Fig. 171

165 et 166 : et pour un grand nombre d'autres analogues compris dans un carré de 4 × 4, comme ceux des figures 167, 168 et 169.

(1) On arrive à ce résultat en remarquant que le nombre 8 peut être formé par l'addition de trois nombres au plus égaux à 4 des sept manières suivantes

$$2+4+2,\quad 4+2+2,\quad 4+3+1,\quad 4+1+3,\quad 3+4+1,\quad 3+2+3,\quad 2+3+3.$$

Les assemblages exécutés d'après ces données se font aisément en indiquant les carrés par de simples points : on trouve ainsi les nombres 13, 8, 6, 3, 8, 4, 12, et en tout, 54.

De même dans un carré de 4 × 4, le nombre d'assemblages de huit carrés se trouve en cherchant le nombre de manières d'obtenir 8 avec quatre nombres au plus égaux à 4, ce qui donne les sommes

$$1+1+2+4,\quad 1+2+2+3,\quad 2+2+2+2,\quad 1+1+3+3,$$

avec les permutations de leurs termes. Certaines figures se reproduisent, soit symétriquement soit après rotation de 90° : elles doivent chacune être comptées pour une.

Les mêmes constructions ont lieu, pour la figure 164, quand on remonte d'un rang les deux carrés de gauche ; pour la figure 166, si on descend d'un rang les deux carrés du milieu, de manière à figurer la lettre H ; pour la figure 167, si on descend d'un rang le carré de gauche et si on recule d'un rang vers la gauche le carré inférieur ; pour la figure 168, si on agit de même sur les deux carrés de droite et les deux carrés inférieurs.

On peut trouver des assemblages, — par exemple celui de la figure 171, — qui sont dans le même cas, mais peuvent être divisés parallèlement aux côtés. On peut en construire d'autres, tel que celui de la figure 170, qui peuvent se diviser, à l'aide de deux parallèles, en parties susceptibles de former un carré.

Quelques unes de ces figures ainsi que des suivantes ont déjà été données dans l'I. M. en 1906 et 1907.

Division de certains polygones en parties superposables. On connaît le problème qui consiste à *partager en trois parties superposables la figure formée d'un carré 4 × 4 dont on retire dans un angle, un carré de 2 × 2*. Ce problème peut être considérablement étendu, même

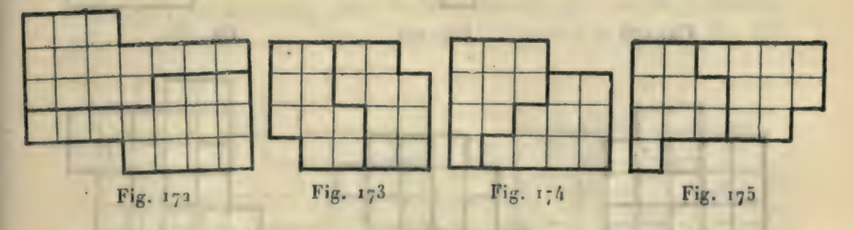
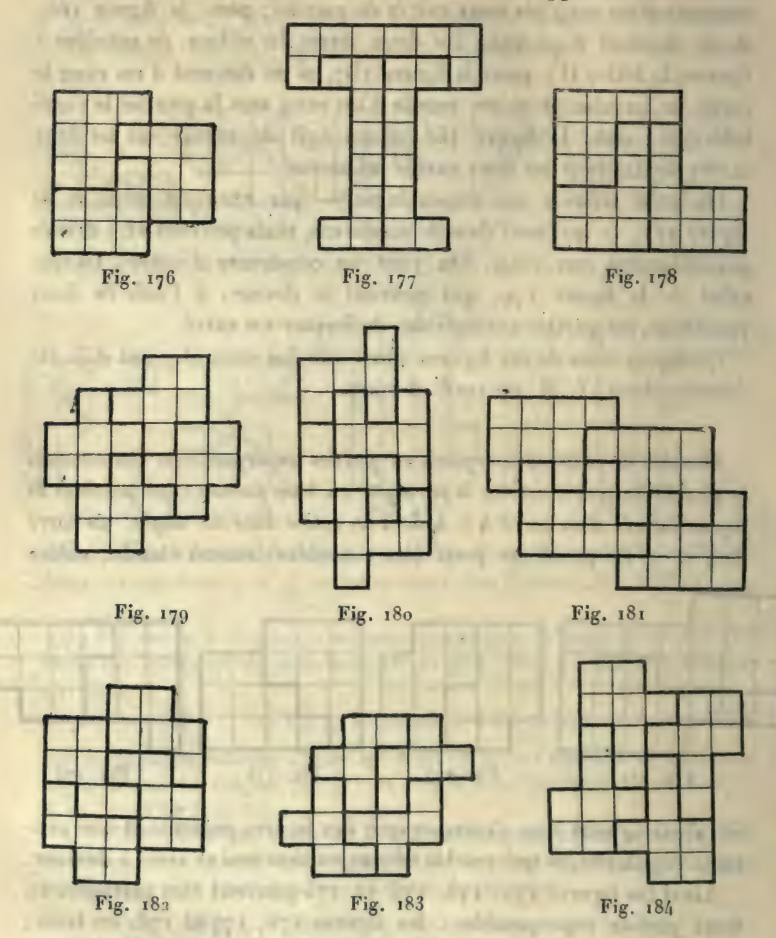


Fig. 172 Fig. 173 Fig. 174 Fig. 175

en s'astreignant à ne s'occuper que des figures présentant une certaine régularité, ce qui rend la décomposition moins aisée à deviner.

Ainsi les figures 172, 173, 174 et 175 peuvent être partagées en deux parties superposables ; les figures 176, 177 et 178, en trois ; les figures 179 à 186 en quatre ; la figure 187 en cinq ; les figures 188 et 189, en six ; la figure 190, en huit ; la figure 191, en dix ; les figures 192 et 193, en douze ; et la figure 194, en dix-huit.

La figure 188 peut aussi se décomposer en cinq parties. La décom-


Fig. 176 Fig. 177 Fig. 178
Fig. 179 Fig. 180 Fig. 181
Fig. 182 Fig. 183 Fig. 184

position de la figure 193 peut se faire différemment, et il y en a plusieurs autres dans ce cas.

On peut considérer la question sous un autre point de vue, et se

donner un élément, en se proposant d'en déduire des assemblages

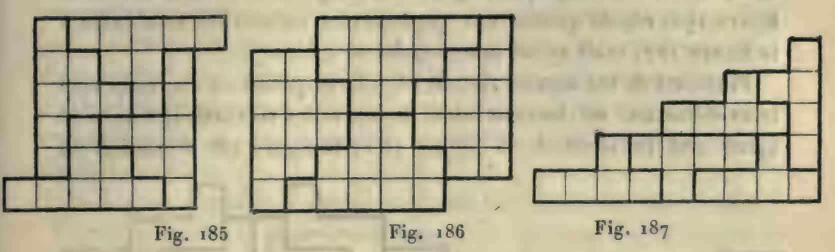


Fig. 185 Fig. 186 Fig. 187

nouveaux à un ou deux axes de symétrie, ou ayant un centre de figure. Certains éléments se prêtent facilement à une foule de com-

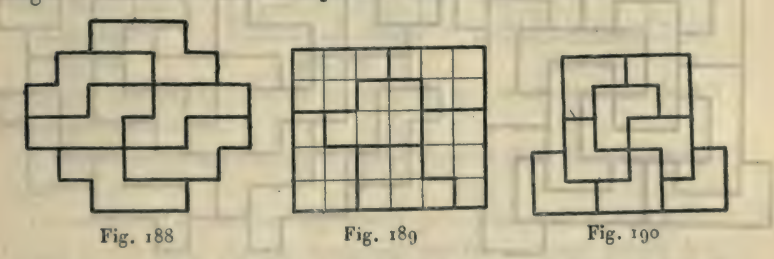


Fig. 188 Fig. 189 Fig. 190

binaisons ; par exemple, celui de la figure 189, qui, employé quatre, puis cinq fois, donnera deux figures analogues à la figure 178 : De

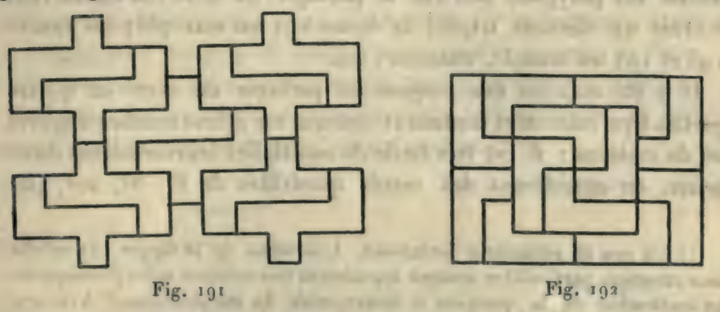


Fig. 191 Fig. 192

même, avec les éléments des figures 197, 192, 190 et 163, on peut faire de curieux polygones à un axe et pouvant se diviser en quatre,

huit, douze et vingt-quatre parties superposables ; l'élément de la figure 192, répété quatre fois, peut donner un escalier semblable à la figure 187, mais ayant une marche de moins (1).

Plusieurs de ces figures restent régulières quand on en retire certains éléments, et donnent ainsi de nouvelles récréations : ainsi la figure 174 provient de la figure 185 ; la figure 186 donnerait de

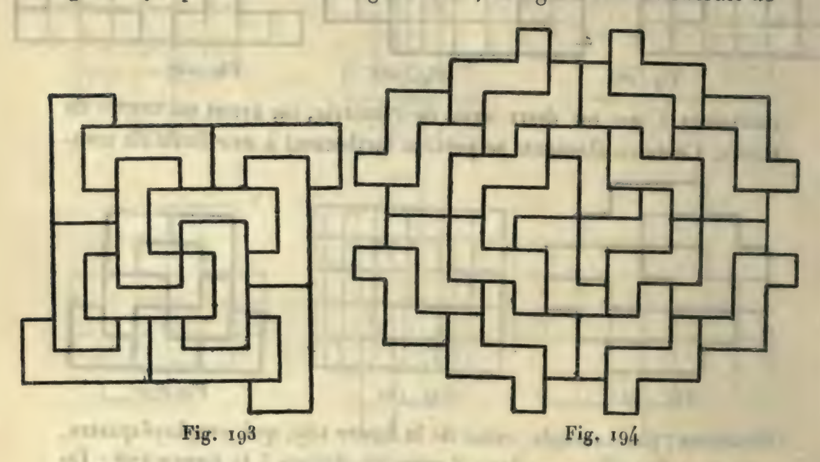


Fig. 193 Fig. 194

même un polygone pouvant se partager en deux ; la figure 195, fournit un élément triplé ; la figure 191 un sextuplé ; les figures 193 et 194 un octuplé, chacune ; etc.

Il a été maintes fois proposé de partager un carré en quatre parties équivalentes et contenant chacune un même nombre d'arbres ou de maisons : il est très facile de multiplier les récréations de ce genre, en considérant des carrés quadrillés de 6^2, 8^2, 10^2, par

(1) Un peu de géométrie fantaisiste. L'élément de la figure 181 mérite une attention particulière comme fournissant une solution aussi péremptoire qu'inattendue de la question si controversée du transformisme. Avec son secours, on démontre *géométriquement* en effet que le cheval provient de l'éléphant : pour vérifier cette importante assertion, il suffit d'enlever, par exemple, les deux carrés en haut et à gauche de la figure.

exemple, et traçant sur le quadrillage, du centre à la périphérie un chemin quelconque qu'on répète par trois rotations successives de 90°. La chose est moins facile, si la figure bien qu'ayant deux axes de symétrie, n'est pas un carré : les figures 195, 196 et 197 donnent trois solutions de ce cas ; on ajoute des arbres et des maisons parce qu'autrement, la décomposition en quatre parties superposables serait immédiate.

Le papier calque et le papier quadrillé au demi-centimètre jouent

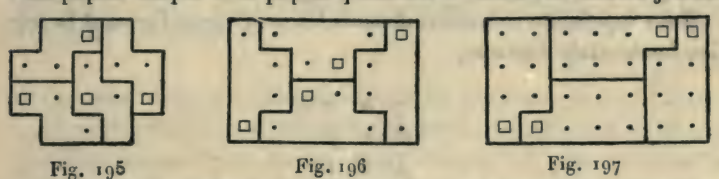


Fig. 195 Fig. 196 Fig. 197

un grand rôle dans toutes ces recherches, qui autrement seraient à peu près impossibles.

A propos de cette question, on peut citer les deux théorèmes suivants :

Le nombre de dispositions différentes qu'on peut réaliser avec n *rectangles* 1 × 2 (tels que les dominos) *mis sur une seule rangée de* 2 *de largeur, est le* n^e^ *terme de la série de Fibonacci* 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... (A. Boutin, I. M. 1897).

Il y a respectivement 1, 4 *et* 14 *nombres tels que les rectangles ayant ces nombres pour rapports de leurs côtés puissent se partager en deux, trois ou quatre rectangles semblables aux rectangles proposés* (Jonesco, I. M. 1908.) On trouve en effet, — et cette recherche est un bon exercice algébraïco-géométrique, — les rapports :

$\sqrt{2}$;

$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$;

$1,\ 2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{5}{2}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \sqrt{\frac{5}{3}},\ \sqrt{\sqrt{2}+1},$

$\sqrt{\sqrt{3}+1},\ \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2}},\ \frac{\sqrt{\sqrt{17}+3}}{2}.$

Partage du cube. Généralement l'extension à l'espace des théories de la géométrie plane sont très difficiles et le plus souvent impossibles. Il est naturel d'essayer d'étendre ainsi les résultats indiqués dans la note précédente, mais cela semble assez ardu. Voici toutefois un résultat simple assez intéressant. *Avec neuf prismes ayant pour base l'élément de la figure 190 et une hauteur égale au côté d'un des trois carrés, construire un cube.* Ces prismes ne peuvent occuper que deux positions : couchés sur leur base, ou bien culbutés sur le côté.

Si on représente comme ci-dessous les neuf carrés formant la section horizontale du cube,

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

on mettra deux prismes couchés, en *bad* et *fih* ; puis trois culbutés, en *eb*, *cf* et *gh* ; ensuite un couché, en *cfe* ; enfin trois culbutés, en *ab*, *dg* et *ih*. Les trois phases principales de l'opération sont indiquées comme suit :

110	122	333
101	122	333
011	221	333

les nombres de ces tableaux indiquant les hauteurs des différentes parties des solides successifs [1].

[1] Le cube peut encore se partager d'autres manières en éléments interchangeables. Ainsi, par exemple, avec seize prismes ayant pour base l'élément de la figure 195, qui peut offrir les trois positions couché, debout et culbuté, — on a cette solution très symétrique : deux couchés, en *cbfe* et *kjnm*; quatre dedout, en *ab*, *dc*, *ij*, *lk* ; deux culbutés *hgf*, *pon* ; quatre debout *ea*, *mi*, *hd*, *pl* ; deux couchés *bcgh*, *jkop* ;

On pourra aussi essayer la composition du cube avec vingt-cinq prismes ayant pour base l'ensemble de cinq carrés égaux en forme de ⊤ ; élément qui peut prendre quatre positions différentes.

Ces éléments sont interchangeables : il est facile de les compliquer en leur adjoignant d'autres cubes détachés d'un ou de deux éléments, de manière à leur nécessiter un emplacement fixe dans l'ensemble, ce qui rend la reconstitution du cube peut-être moins aisée, — bien qu'elle s'applique à un nombre moindre d'éléments.

Je me rappelle avoir vu un jeu qui, sous le nom de *cube diabolique*, comprenait de même divers solides bizarres qu'il fallait assembler en un cube : les remarques ci-dessus permettront d'en construire de semblables.

Quelques remarques élémentaires sur les lignes courbes. 1° Certains moyens de définir les courbes sont plutôt du domaine des récréations mathématiques. Deux droites étant divisées en parties égales, on sait, depuis Apollonius, que l'enveloppe des droites qui joignent les points de division est une parabole ; si ces droites sont assez rapprochées, les intersections successives sont très voisines de la courbe, et peuvent pratiquement servir à la dessiner.

De même, on a vu, p. 288, qu'une corde circulaire mobile dont les extrémités se meuvent uniformément, enveloppe une épicycloïde. Il s'ensuit que si on mène toutes les diagonales d'un polygone d'un nombre de côtés suffisamment grand, les intersections successives figureront diverses épicycloïdes [1]. Il serait abusif qu'on demandât de traiter ainsi le *polygonus pentakismyriohexakischiliotetracosiohexacontapentagonalis*, de Jacques Bernoulli, ou polygone de 56 465 côtés, dont le nom pourrait figurer dans les listes de grands mots publiés récemment dans l'*Interm. des Cherch.* ; ni même le *chiligonus* de Newton : il suffira d'essayer la construction sur le polygone régulier de 35 ou même de 17 côtés.

[1] C'est ici le lieu de signaler un des ingénieux appareils dus à M. Chassagny, professeur de physique au lycée Jeanson de Sailly. En deux points fixes de deux poulies à plusieurs gorges réunies par une courroie sans fin et mues à la main, sont articulées les extrémités A et O de deux tiges AO, OB articulées en O. Suivant les cas, l'articulation O trace une droite, une ellipse, une parabole, une besace, et généralement une courbe de Lissajous.

2° La géométrie analytique permet de reconnaître les formes qu'affectent les courbes déterminées par leur équation, et même les singularités infiniment petites que l'œil ne peut voir mais dont l'analyse révèle l'existence.

Les courbes algébriques se distinguent surtout par leur degré, lequel a la plus grande influence sur leur forme, car il indique le nombre maximum de points où une droite peut les couper. Les courbes du deuxième degré peuvent présenter trois formes, et celles du troisième, soixante-seize ; l'étude du nombre des courbes du quatrième n'a pas encore été menée à terme, tellement ce nombre est considérable.

On peut se proposer le but, beaucoup plus modeste, de dénombrer les courbes fermées ayant des singularités déterminées. Par exemple, il n'y a que deux formes de courbes fermées ayant un point double ; il y en a cinq ayant deux points doubles, et vingt-quatre ayant trois points doubles. Parmi ces dernières, il y en a trois qui ont trois axes de symétrie, trois qui en ont deux, seize qui

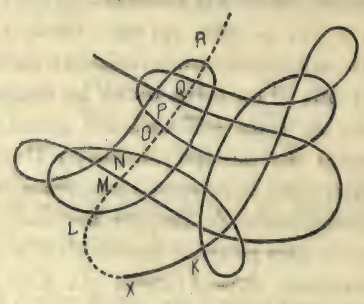


Fig. 198

qui en ont un et deux qui en sont dépourvues. Des études de ce genre seraient plus utiles qu'on ne serait tenté de le croire au premier abord ; il semble même qu'on pourrait y trouver de nouveaux motifs de décoration et un moyen de façonner le goût des jeunes dessinateurs.

3° Voici encore une des questions qu'on pourrait se proposer sur

les lignes courbes en général. *Une courbe unicursale* (courbe pouvant être tracée d'un seul trait) *peut-elle être considérée comme l'image d'un fil passant alternativement sur et sous chaque brin rencontré ?* La réponse est : oui. Il suffit de faire voir que si la chose a lieu pour une certaine figure, elle a lieu également quand on la complique d'une manière quelconque, car cela est facile à vérifier directement dans les cas simples.

Remplaçons donc la branche terminale KX (fig. 198) par une autre traversant la courbe, en L, M, N, O, P, Q, R, et donnons au point L, la parité contraire à celle de K. L'un des nœuds voisins de L sur la courbe est de même parité que K ; on n'y changera rien, mais celle de l'autre sera modifiée ainsi que tous les nœuds sur la courbe jusqu'au nœud voisin de M. Le nœud suivant sur la courbe ne sera pas modifié ni les suivants jusqu'au nœud N ; mais le suivant le sera, ainsi que tous les suivants jusqu'à celui voisin du point O. Et ainsi de suite.

ERRATA

—

Page 138, figure 1 ; au lieu de chiffres indiens, lire chiffres sanscrits.
157, ligne 4 ; à la suite du point, ajouter (fig. 13).
157, ligne 11 ; » » (fig. 14).
» 157, ligne 14 ; » » (fig. 15).
» 158, ligne 2 ; » » (fig. 17).
» 163, ligne 28 ; » » (fig. 21).
» 184, ligne 4 ; au lieu de $4b^2$, lire $4b^4$,
» 220, figure 38 ; mettre la lettre F à la force non désignée.
» 221, figure 40 ; ajouter les forces verticales R, R′ aux extrémités de la barre 3 (fig. de droite).
» 228, dernière ligne, ajouter : il a été donné une nouvelle édition en 1903, par M. Fazari, de l'ouvrage de Marcheroni.
» 239 et 240. Les figures 80 et 81 ont été interverties.
» 246, figure 95 ; Le point Q est la projection de N sur AD et non celle de F.
» 261, figure 119 ; à l'angle supérieur, il faut T au lieu de F.
» 330, figure

NOTE

Par Fitz PATRICK

LA GÉOMÉTRIE PAR LE PLIAGE ET DÉCOUPAGE DU PAPIER [1]

Découper une feuille de papier en forme de rectangle. — Il est facile de plier une feuille de papier donnée de manière à obtenir un rectangle ABCD et le procédé est certainement connu de la plupart des écoliers.

On commence par faire un pli MN suivant l'un des bords de la feuille, puis faisant glisser la lame d'un canif entre les deux épaisseurs et suivant le pli MN, on détache le bord ainsi replié.

On marque alors un point A sur MN, dans le voisinage d'une des extrémités ; on plie de nouveau la feuille de manière à amener le segment MA sur le segment AN. On obtient ainsi un second pli AP qui est perpendiculaire au premier puisque les deux angles adjacents supplémentaires MAP, PAN sont égaux. On détache avec le canif le bord inutile replié AMP.

On marque de la même façon un second point B sur AN, dans le voisinage de l'extrémité N et en amenant le segment BN sur le

[1] Le lecteur consultera avec fruit l'ouvrage « Geometrical exercises in paper folding » par T. Sundara Row — Madras, 1893.

segment BA on marque le pli BQ qui est également perpendiculaire à AB.

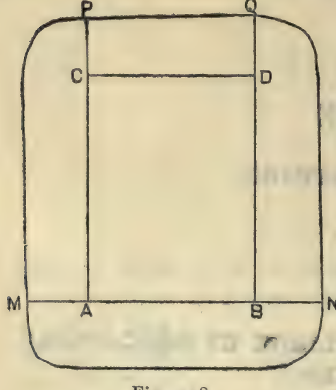


Fig. 198

On détache encore le bord replié NBQ.

Il ne reste plus pour achever le rectangle qu'à prendre deux longueurs égales AC, BD sur les deux plis AP, BQ et qu'à faire un dernier pli suivant CD.

On comprend facilement, sans qu'il soit nécessaire d'insister que l'on peut très bien faire en sorte que les côtés du rectangle découpé aient des longueurs données ; il suffit de repérer en conséquence les points B, C et D.

Découper une feuille de papier en forme de carré. — Du rectangle ABCD on passe au carré, en pliant obliquement le papier de manière à amener le petit côté DC sur le grand côté adjacent DA.

Soit DF le pli.

On marque sur DA le point E tel que DE = DC, on plie le rectangle suivant EF et on détache avec le canif la partie repliée EFBA.

La figure DCEF est un carré.

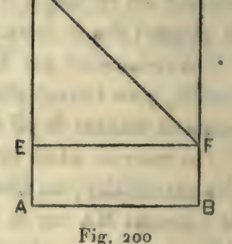


Fig. 200

Découper dans un carré de papier un triangle isocèle, un triangle équilatéral. — Plions le carré ABCD de façon à amener le côté BC en coïncidence avec le côté AD ; marquons le pli MN en pressant avec le doigt ou avec l'ongle, puis ouvrons la feuille.

Les points M et N sont les milieux des côtés opposés DC, AB.

Marquons alors un point quelconque E sur MN et plions la feuille suivant AE et BE.

La figure AEB est un triangle isocèle que l'on peut isoler en coupant le papier suivant les plis AE et BE.

Pour avoir un triangle équilatéral on commence, comme nous l'avons fait par marquer le pli MN, puis on plie en diagonale le carré de façon à faire tourner pour ainsi dire, le côté AB autour de A et à déterminer sur le pli MN le point E tel que l'on ait AE = AB.

Ce point E une fois marqué on fait deux plis suivant AE et BE et on détache, avec le canif, le triangle AEB qui est équilatéral.

Sur le côté AB d'un carré ABC, pris comme hypoténuse, construire un triangle rectangle ayant une hauteur connue. — Portons sur les deux côtés opposés AD, BC, les deux lon-

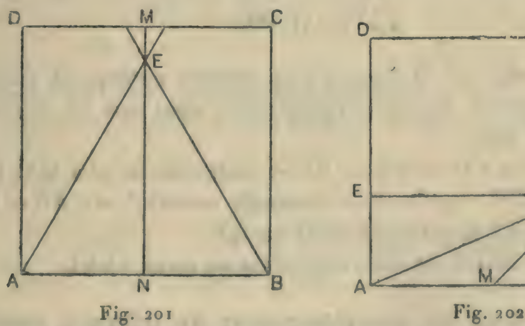


Fig. 201 Fig. 202

gueurs AE, BF égales à la hauteur donnée, et plions le papier suivant EF.

Ouvrons la feuille après avoir marqué le pli.

Déterminons, en second lieu, le milieu M du côté AB en appliquant le côté BC du carré sur AD et en faisant coïncider les deux segments de AB. On ne marque le pli que sur AB.

Cela fait rabattons l'angle MBF de la feuille, en le faisant tourner autour d'une droite fictive passant par M et de manière à amener le point B à coïncider avec un point de EF. Soit G ce point.

Il ne reste plus alors qu'à faire un pli suivant GB et un autre suivant GA.

Le triangle AGB formé par ces deux plis est rectangle en G.

Étant donné un carré ABCD, déterminer sur un des côtés, AB par exemple, un point X tel que le rectangle ayant pour côtés AB et BX soit équivalent au carré construit sur AX. — En rabattant le côté BC sur lui-même on obtient son point milieu E. fig. 203.

Marquons le pli AE.

Rabattons l'angle B du carré de manière à amener EB en EG sur le pli AE et marquons le pli EF ainsi déterminé.

Plions de nouveau la feuille suivant FG et portons enfin avec une bande de papier, la longueur AG en AX sur AB.

On aura

$$\overline{AX}^2 = AB.BX$$

On voit en effet que la construction exposée correspond exactement à celle qui est donnée graphiquement dans tous les cours de géométrie. fig. 204.

Prenons CP = CH = DL = BX et marquons les plis HX, PL.

La figure DCPL représente le rectangle construit sur AB et BX et la figure ALKX le carré construit sur AX.

Le rectangle DCPL est donc équivalent au carré AXKL.

Découper dans un carré de papier un triangle isocèle dont les angles à la base sont doubles de l'angle au sommet. — Soit ABCD le carré donné.

On commence par déterminer sur AB le point X tel que

$$AB.BX = \overline{AX}^2.$$

Déterminons alors les deux rectangles AXHD, BXHC en prenant sur le côté CD opposé à AB, la longueur CH = BX et en pliant le carré de papier suivant XH.

En pliant en deux le rectangle XBCH on marque le pli médiant MO.

Cela fait, on détermine sur ce pli MO, le point N tel que AN = AB au moyen d'un rabattement de l'angle B du carré autour d'une droite fictive passant par A.

Il ne reste plus alors qu'à marquer les plis AN, BN et qu'à dé-

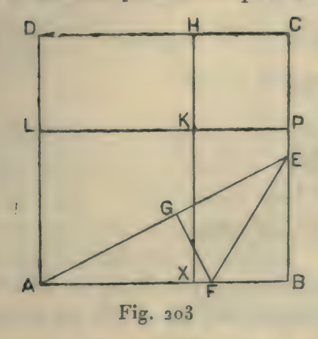


Fig. 203

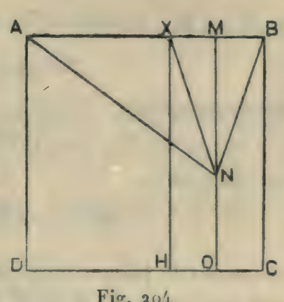


Fig. 204

couper la figure ABN qui répond à la question.

Remarquons, en effet, que le triangle ANB est isocèle de même que NXB.

D'ailleurs

$$\overline{NX}^2 = \overline{NB}^2 = \overline{NM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2$$
$$= \overline{AB}^2 - \left(\overline{AM}^2 - \overline{MB}^2\right) = \overline{AB}^2 - (AM + MB)(AM - MB)$$
$$= \overline{AB}^2 - AB.AX = AB.BX = \overline{AX}^2$$

Donc AXN est également isocèle ;

Angle ABN = angle BXN = 2 fois angle BAN.

On a aussi

$$BAN + 4BAN = 2 \text{ droits},$$

d'où

$$BAN = \frac{2}{5} \text{ d'un angle droit.}$$

Découper dans un carré de papier donné ABCD **un pentagone régulier.** — Déterminons sur le côté AB le point X tel que

$$AB.BX = \overline{AX}^2$$

puis par un pli, marquons le milieu M de BX et prenons

$$AN = BM.$$

Remarquons que

$$MN = AX,$$

et, que par suite,

$$\overline{MN}^2 = AB.BX = AB.2BM.$$

Au moyen de pliages faits successivement autour de lignes fictives passant par les points M et N, déterminons sur BC et AD les points R et P tels que

$$RM = MN = NP.$$

Plions maintenant le papier suivant RM, NP et RP, puis suivant la ligne médiane ST.

Fig. 205

Cela fait, déterminons sur ce pli ST le point O tel que RO = RM, et enfin marquons les plis RO, OP, RN, OM, ON et PM.

La figure MNPOR est un pentagone régulier ayant pour diagonales les plis RN, RP, MO, MP et ON qui se coupent deux à deux aux points E, F, G, H et K.

1° Par la construction même, le polygone formé est équilatéral.

2° Il est de plus équiangle;

Remarquons, en effet, que l'on a :

$$\overline{RN}^2 - \overline{NB}^2 = \overline{RM}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{MB}^2$$

d'où

$$\overline{RN}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{MB}^2 + \overline{NB}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{MB}^2 + (AB - BM)^2$$
$$= \overline{MN}^2 - \overline{MB}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 - 2AB.BM = \overline{AB}^2.$$

Ainsi

$$RN = PM = RP = AB.$$

Il résulte de là que les triangles isocèles RMN, MNP et ROP sont égaux comme ayant les trois côtés égaux et que, par suite, les trois angles RMN, MNP et ROP sont égaux.

On remarque aussi que les droites RN, PM sont les bissectrices des angles PRM, RPN puisque

$$PRN = RNM = MRN;$$

et que les droites MR, NP sont bissectrices des angles BMP, ANR.

D'ailleurs, les triangles isocèles PRM, RPN étant égaux,

$$\widehat{PRN} = \widehat{RPM}.$$

Dès lors dans chacun de ces triangles, les angles à la base valent chacun le double de l'angle au sommet, c'est-à-dire que

$$RMP = MRP = 2RPM = \frac{4}{5} \text{ de droit.}$$

Par conséquent, les trois angles égaux RMN, MNP et ROP valent chacun

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \text{ de droit.}$$

Enfin, les deux triangles ORM, OPN étant égaux, on a :

$$ORM = OPN = 6 \text{ droits} - 3 \text{ fois } \frac{6}{5} \text{ de droits} = \frac{6}{5} \text{ de droit.}$$

Donc la figure ORMNP est équiangle.

On démontre facilement que la figure EFGHK est également un second pentagone régulier dont les côtés prolongés forment le pentagone étoilé.

Découper un hexagone régulier dans un carré de papier. — Soit le carré MNPQ.

On le plie successivement suivant AB et CD.

En amenant le bord QM sur le pli CD et le bord PN sur le même pli CD, on marque les deux nouveaux plis EF, GH qui passent respectivement par les milieux de AO et de BO et sont perpendiculaires à ce pli AOB.

Enfin, on détermine sur EF et GH les points K, S, L, R tels que

$$AK = AS = OA\,; \quad BL = BR = BO,$$

et on marque les 6 plis AK, KL, LB, BR, RS et SA, la figure AKLBRS ainsi obtenue est un hexagone régulier.

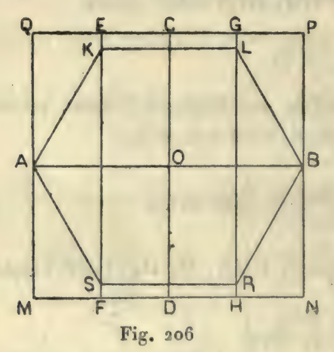
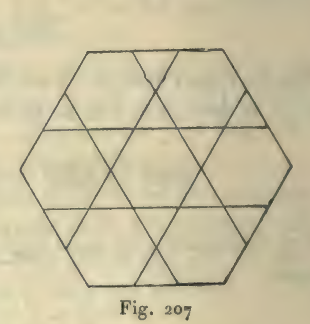


Fig. 206


Fig. 207

La démonstration est trop évidente pour que nous nous y arrêtions.

En pliant la feuille suivant LOS et KOR, la figure est décomposée en 6 triangles équilatéraux égaux.

L'hexagone une fois découpé, si on le plie comme le représente la seconde figure suivant les droites passant par les points qui divi-

sent chaque côté en trois parties égales, on le décompose en 7 petits hexagones réguliers et en 12 petits triangles équilatéraux égaux.

Découper dans un carré de papier un octogone régulier. — Soit MNPQ le carré donné.

Déterminons les points milieux A, B, C, D, des quatre côtés et marquons les plis AB, BC, CD et DA, ce qui nous donne le carré ABCD.

Plions maintenant chacun des angles aux bases des triangles rectangles isocèles NAB, PBC, QCD et MDA, de façon à amener AN sur AB, BN sur BA, PB sur BC, CP sur CB, etc.

Les plis ainsi marqués sont les bissectrices des angles NAB, ABN, CBP, PCB, etc., et la figure EBFCGDHA est un octogone régulier.

Cette figure est, en effet, équilatérale, car l'égalité des côtés est la

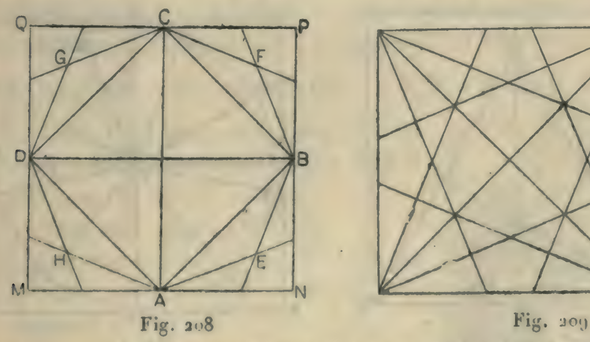


Fig. 208 Fig. 209

conséquence de celle des 4 triangles isocèles EAB, FBC, GCD, HAD.

De plus, les angles sont égaux, car

$$HAE = EBF = FCG = GDH = 1 \text{ droit} + \frac{1}{2} \text{ de droit}$$

et

$$AEB = BFC = CGD = DHA = 2 \text{ droits} - \frac{1}{2} \text{ de droit} = 1 \text{ droit} \frac{1}{2}.$$

On peut encore obtenir un octogone régulier en pliant chaque

angle du carré, comme le représente la seconde figure, en quatre parties égales.

Découper dans un carré de papier un polygone régulier de neuf côtés. — On arrive, avec un peu d'exercice, à plier très approximativement un angle en trois parties égales.

Commencons d'abord par plier un triangle équilatéral A′B′C′ découpé dans un carré de papier suivant les droites A′F′, C′E′, B′D′ qui passent par les milieux des côtés et qui se coupent en O au centre du triangle en formant trois angles égaux à 120°.

Découpons alors les trois angles A′O′B′, B′O′C′, C′O′D′ et plions l'un d'eux, A′O′B′ par exemple, le plus exactement possible, en trois parties égales. Soient O′G′ et O′H′ les plis.

Soit maintenant ABCD le carré de papier donné ; déterminons

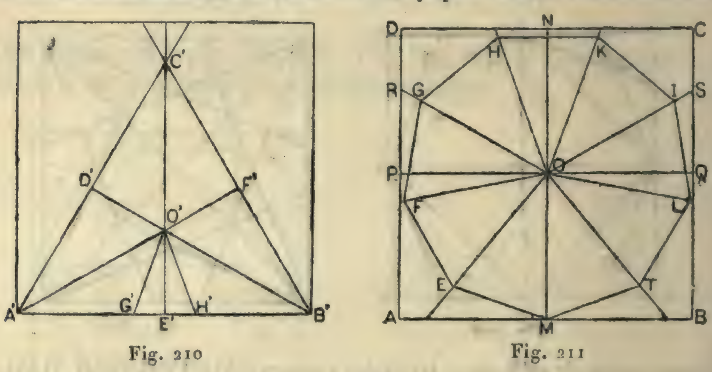


Fig. 210 Fig. 211

son centre par les deux plis MN, PQ qui passent par les milieux des côtés.

Appliquons alors successivement et trois fois le triangle isocèle A′O′B′ sur le carré ABCD en plaçant le sommet O′ en O et le côté O′B′ suivant la direction OM.

On marque la direction OR du côté O′A′ et les directions OF, OE des deux plis O′G′, O′H′.

Le même triangle appliqué une seconde fois le sommet O′ en O

et le côté O'B' suivant OM, on marque la direction OS du côté O'A' et les directions OL, OT des deux plis O'G', O'H'.

Enfin, le même triangle A'O'B' appliqué une dernière fois dans l'angle ROS nous fournit deux nouvelles directions qui partagent l'angle ROS en trois parties égales.

On porte alors sur les directions OE, OF, OR, OH, OK, OS, OL, OT une même longueur OM et il ne reste plus qu'à plier et à découper le papier suivant les droites ME, EF, FG, GH...

La figure ainsi formée est un polygone régulier de neuf côtés.

Découper dans un carré de papier un pentédécagone régulier. — On commence par inscrire dans le carré le pentagone ABCDE comme il a été expliqué plus haut.

Plions maintenant la figure suivant les lignes qui passent par chaque sommet et le milieu du côté opposé et dont l'intersection commune est le centre O du pentagone. Sur l'un des plis ainsi faits, DOK par exemple, prenons OF $= \frac{1}{2}$ OD et plions le papier suivant la droite GFH perpendiculaire à DOK.

Prenons sur ce pli les points G et H tels que OG = OH = OD.

Marquons les plis OG, OH.

Les trois points D, G, H sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O et l'on a :

DOG = GOH = DOH = 120°.

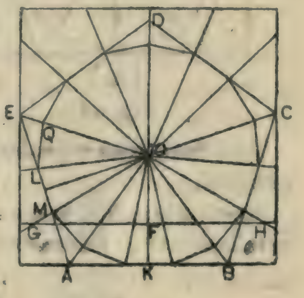


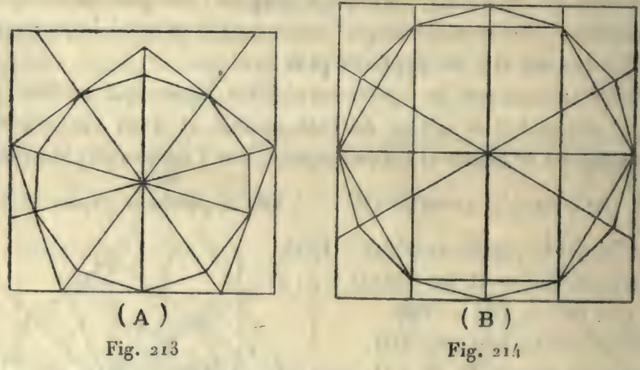
Fig. 212

Mais l'angle DOA vaut les $\frac{2}{5}$ de 360° ou 144°, donc l'angle GOA vaut 144° — 120° = 24°, c'est-à-dire le tiers de l'angle au centre du pentagone.

En pliant en deux l'angle GOE, l'angle AOE du pentagone sera partagé en trois parties égales par les plis OM, OL. On porte alors sur les quatre autres côtés du pentagone les segments AM, ML,

LE, on forme les plis passant par le centre O et par les divers points ainsi obtenus, on prend enfin sur les rayons OA, OE,..., les longueurs OP, OQ,..., égales entre elles et à OM = OL et on achève sans difficulté la figure.

Découper dans un carré de papier un décagone régulier, un dodécagone régulier. — Les figures (A) et (B) ci-après montrent suffisamment, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans des explications, comment on peut déduire le décagone régulier du pentagone et le dodécagone régulier de l'hexagone.



(A) Fig. 213

(B) Fig. 214

Nous donnerons cependant une seconde solution directe pour le décagone.

Prenons le milieu M du côté AB du carré de papier donné et déterminons sur ce même côté les points X et Y tels que

$$AB.BX = AB.AY = \overline{AX}^2 = \overline{BY}^2.$$

Marquons les trois plis MN, XX′, YY′ et déterminons sur le premier le point O tel que

$$AO = AX = BY = BO.$$

Plions la feuille suivant AO, BO, YO et XO.

Ces deux derniers plis coupent XX′ et YY′ en C et D.

Remarquons que dans les deux triangles isocèles OAX, XOY, on a

$$OAX = XOY = \frac{2}{5} \text{ d'un angle droit} = 36°.$$

Rabattons la partie DOC de la figure sur la partie YOX, nous formons ainsi le pli FK qui partage l'angle LOH et son opposé par le sommet en deux parties égales.

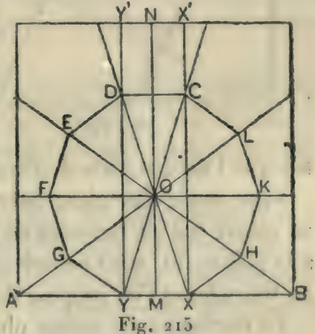


Fig. 215

Prenons enfin sur les plis les longueurs égales

$$OX = OY = OH = OK = OL = \ldots$$

La figure XYGFED...H est un décagone régulier convexe.

Nous n'abandonnerons pas la question du pliage et du découpage du papier sans faire mention de certaines transformations de figures qui, bien qu'entrant dans la catégorie des jeux dits de patience ou de casse-tête, n'en constituent pas moins d'excellents exercices de géométrie pratique.

On donne 5 petits carrés égaux et l'on propose de découper 4 d'entre eux en deux parties, de manière à former avec le cinquième un nouveau carré.

On coupe les 4 carrés suivant une ligne allant d'un sommet au milieu du côté opposé.

On a ainsi un trapèze et un triangle rectangle, et les 8 morceaux peuvent être disposés autour du cinquième carré comme le représente la figure ci-après en formant un nouveau carré ABCD.

La question pourrait également être énoncée comme il suit :

Décomposer un carré donné ABCD en 9 morceaux qui, assemblés convenablement, donnent 5 carrés égaux.

Remarquons que le carré ABCD peut être décomposé comme le représente la seconde figure en 20 petits triangles rectangles égaux

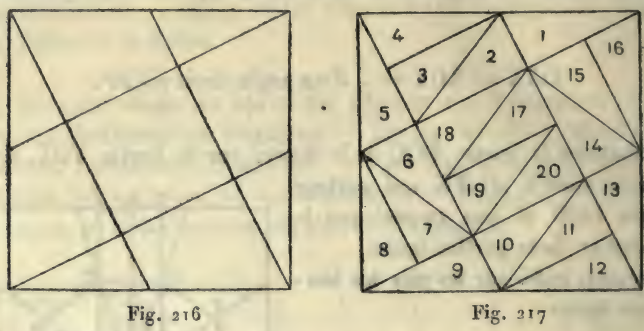


Fig. 216 Fig. 217

tels que l'un des côtés de l'angle droit est égal au double de l'autre.

Après avoir fait tracer cette figure sur un morceau de papier fort ou mieux sur un morceau de carton blanc, on découpe les triangles à la pointe du canif en suivant les lignes de division, on sépare les 20 triangles et l'on propose de reconstituer la figure initiale.

La récréation est encore plus intéressante si avant de détacher les triangles on a eu soin de les teinter d'une nuance différente.

Avec 12 petits triangles rectangles égaux tels que le petit côté de l'angle droit soit égal à la moitié de l'hypoténuse, on peut constituer

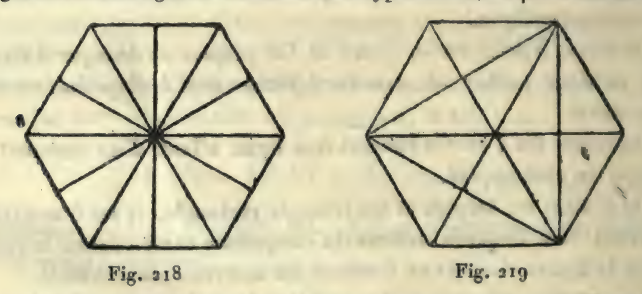


Fig. 218 Fig. 219

un hexagone régulier de deux façons différentes comme le représentent les figures ci-dessus.

Une jolie petite récréation pour les enfants consiste à leur faire

tracer sur un morceau de carton blanc, un certain nombre d'hexagones réguliers, qu'ils décomposent en 12 triangles rectangles.

Tous ces triangles sont colorés diversement puis séparés avec le canif.

On les mélange alors et l'on se propose de reconstituer un carrelage en hexagone. La diversité des couleurs produit des mosaïques parfois originales.

On donne 10 petits carrés égaux et l'on se propose de découper chacun d'eux en deux parties et de réunir les 20 morceaux ainsi obtenus de façon à former un nouveau carré.

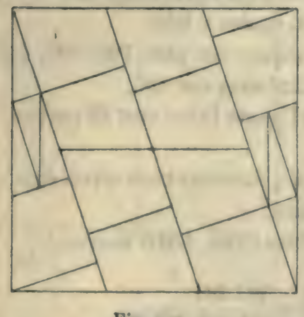
Il suffit de couper chaque carré suivant une droite passant par un sommet et le point situé au tiers du côté opposé à ce sommet.

Les 20 morceaux sont ensuite assemblés comme le représente notre figure.

On remarquera que dans les triangles rectangles séparés dans chaque carré, le grand côté de l'angle droit vaut 3 fois le petit.

On donne 13 petits carrés et l'on demande de couper 12 d'entre eux en deux parties telles qu'il soit possible de grouper les 24 morceaux autour du 13ᵐᵉ carré de façon à former un nouveau carré.

Chaque carré doit être coupé par une droite passant par un



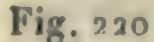


Fig. 220

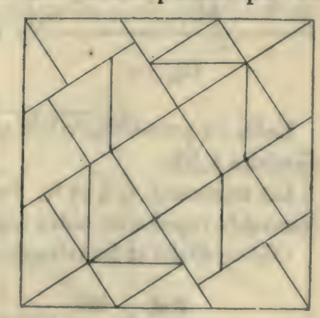


Fig. 221

sommet et le point situé aux $\frac{2}{3}$ du côté opposé à ce sommet.

Les 24 morceaux sont réunis comme le représente la figure ci-dessus.

Dans chaque triangle rectangle détaché des carrés, le petit côté de l'angle droit vaut les $\frac{2}{3}$ du grand côté.

On voit de suite que les décompositions précédentes sont basées sur les égalités

$$1^2 + 2^2 = 5,$$
$$1^2 + 3^2 = 10,$$
$$2^2 + 3^2 = 13.$$

On pourrait continuer ce genre de récréations, mais le nombre des carrés à employer deviendrait trop grand.

Décomposer un carré donné en 7 parties qui, assemblées convenablement forment trois carrés égaux.

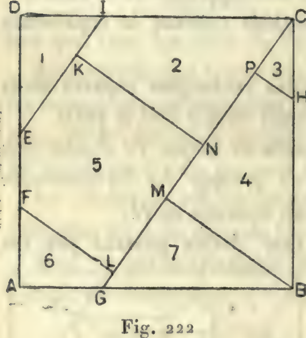


Fig. 222

On prend sur l'un des côtés du carré donné, AB par exemple, la longueur BG égale à la moitié de la diagonale du carré, puis on plie le papier suivant CG.

On forme le pli BM perpendiculaire à CG.

On prend les trois longueurs MP, CN et NL égales à BM.

On marque les plis PH, NK, LF perpendiculaires sur GC.

Enfin on prend NK = BM et on plie l'angle D suivant EI perpendiculaire à NK.

Les morceaux 1, 4 et 6 ; 3 et 5 ; 2 et 7 forment trois carrés égaux comme le représente notre seconde figure.

$CG^2 = 3GB^2$ et les triangles semblables CBG, CMB donnent :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BG}{CG}, \text{ par suite } BM = \frac{BC.BG}{BG\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Le Colonel de Coatpont a donné, dans le tome III de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, d'autres solutions de la même ques-

tion. Il a fait observer que le problème est indéterminé et a donné ces deux énoncés :

Découper un carré en un nombre minimum de parties telles que,

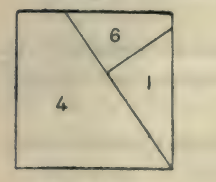


Fig. 223

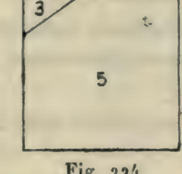


Fig. 224

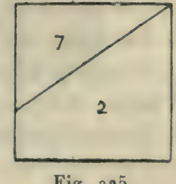


Fig. 225

groupées convenablement, elles constituent un nombre quelconque de carrés égaux entre eux.

Partager un carré en segments qui puissent constituer un nombre donné de carrés égaux.

Décomposer un carré en huit parties de manière qu'en les assemblant convenablement on puisse former : 1° deux carrés dont le plus grand soit double du plus petit ; 2° trois carrés dont les surfaces soient respectivement proportionnelles aux nombres 2, 3, 4.

On prend sur l'un des côtés du carré, AB par exemple, la longueur AE égale à la moitié de la diagonale du carré, puis on trace

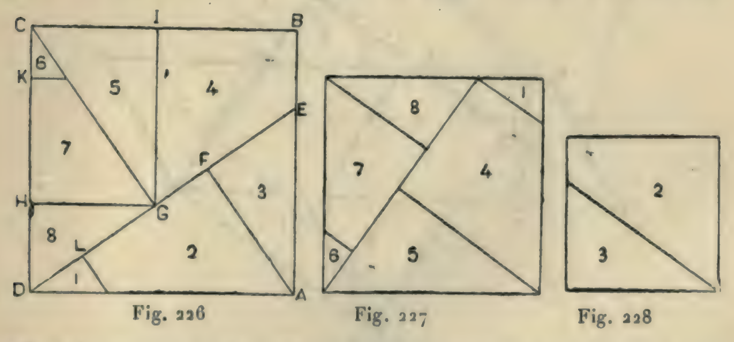


Fig. 226 Fig. 227 Fig. 228

DE et des sommets A et C on abaisse les perpendiculaires AF, CG sur DE.

Du point G on abaisse les perpendiculaires GH, GI sur les côtés CD, CB.

On prend HK = HG, FL = FA et en K et L on élève les perpendiculaires à CD et DE.

La figure est alors décomposée en huit morceaux numérotés de 1 à 8 qui peuvent être assemblés comme le représentent l'une ou l'autre des figures ci-après.

Cette décomposition a été publiée dans la *Nouvelle Correspondance*

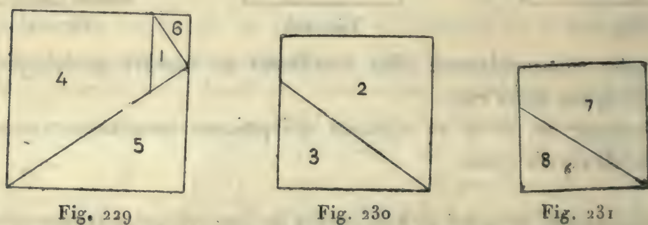


Fig. 229 Fig. 230 Fig. 231

mathématique (T. II, p. 83). Elle est due à Paul Busschop.

Décomposition de l'hexagone régulier en cinq parties qui, assemblées convenablement forment un carré.

L'hexagone est divisé en deux parties égales par un diamètre et

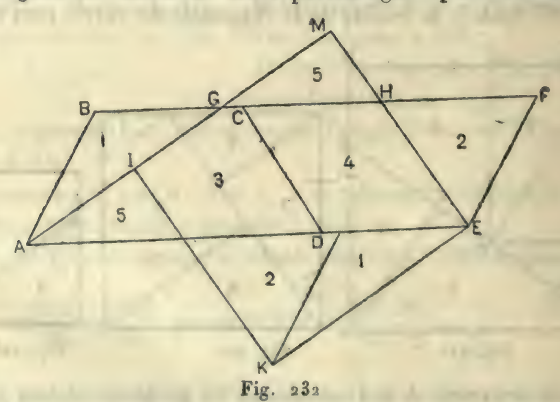


Fig. 232

l'on dispose les deux parties à côté l'une de l'autre de façon à ob-

tenir un parallélogramme ABFE. Du point A comme centre avec un rayon égal à la moyenne proportionnelle entre la longueur AE et la hauteur du parallélogramme, on trace un arc de cercle qui coupe en G le côté BF du parallélogramme.

Du sommet E on abaisse la perpendiculaire EM sur la droite AG et on prend, sur cette même droite, la longueur MI égale à ME.

Enfin on trace la perpendiculaire IK à AM.

L'hexagone se trouve alors divisé en cinq parties qui peuvent être découpées et assemblées de manière à former un carré comme le représente la figure.

Décomposition du pentagone régulier en sept parties qui assemblées convenablement forment un carré.

ABCDE étant le pentagone considéré, prolongeons la diagonale

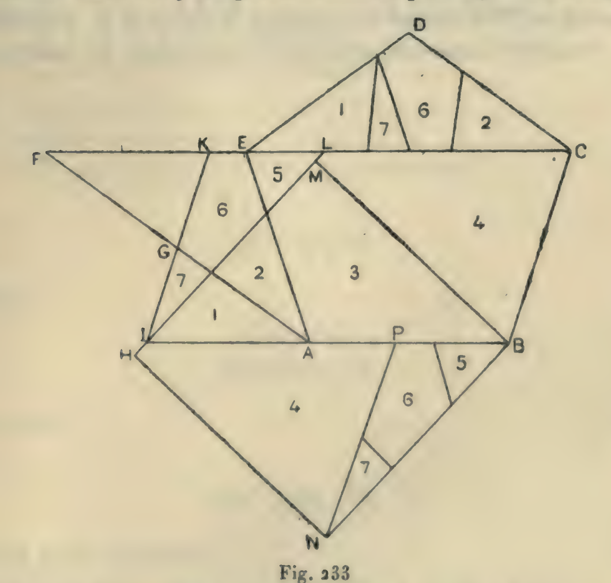


Fig. 233

CE d'une longueur EF égale au côté du pentagone et traçons AF.

Les deux triangles DCE, FEA sont égaux et on peut remplacer le pentagone par le trapèze équivalent BCFA.

Par le milieu G de AF menons la parallèle au côté BC jusqu'à sa rencontre en K avec CF, et en I avec le prolongement de BA.

On transforme ainsi le trapèze ABCF en un parallélogramme équivalent IBCK.

Du point I comme centre avec une ouverture de compas égale à la moyenne proportionnelle entre la base BI et la hauteur du parallélogramme décrivons un arc de cercle qui coupe CK en L, puis traçons IL. Cette droite détermine les 4 parties numérotées 1, 2, 6, 7, qui assemblées convenablement constituent le triangle CDE.

La perpendiculaire BM abaissée de B sur HL détermine les deux parties 3, 4.

Le triangle IKL constitué par les trois parties 7, 6, 5 peut être transporté en NPB comme le représente la figure et le quadrilatère [illegible] en HIPN achève le carré HMBN équivalent au pentagone.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE XI

CHAPITRE XII

CHAPITRE XIII

NOTES DIVERSES DE M. AUBRY

Géométrie

NOTE DE M. FITZ PATRICK

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.